

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

GEOVANI AUGUSTO XAVIER RIBEIRO

**Análise da interferência do albedo terrestre na
determinação de atitude do satélite Amazonia 1**

Lorena – SP

2022

GEOVANI AUGUSTO XAVIER RIBEIRO

**Análise da interferência do albedo terrestre na
determinação de atitude do satélite Amazonia 1**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo como requisito parcial para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Física

Orientador: Prof. Dr. Ronan Arraes
Jardim Chagas

Lorena – SP

Novembro de 2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha Catalográfica
EEL USP

Ribeiro, Geovani

Análise da interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1 / Geovani Augusto Xavier Ribeiro; orientador Ronan Arraes Jardim Chagas. - Lorena, 2022.

93 p.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de Lorena - Universidade de São Paulo.

1. Albedo Terrestre 2. TRIAD 3. Q-Method 4. QUEST 5. Amazonia 1 I. Título. II. Chagas, Ronan Arraes Jardim, orient.

Agradecimentos

Primeiramente, sou grato aos meus pais, Elizabete e Elton, pelo incentivo nos momentos difíceis e pelo apoio incondicional nesta importante jornada da minha vida, a graduação em Engenharia Física. Ao meu irmão, Felipe Vinícius, pelo companheirismo.

Minha eterna admiração e gratidão ao meu orientador, Dr. Ronan Arraes Jardim Chagas, por compartilhar com extrema sabedoria os seus conhecimentos sobre os tópicos abordados neste trabalho e o meu mais sincero muito obrigado para a Dra. Roberta Veloso Garcia por tudo desde a disciplina de Cálculo I que foi ministrada em 2019 até a etapa final da minha graduação, agradeço por todos estes anos de conhecimento e amizade.

Além disso, sou grato por todos estes anos de companheirismo e irmandade na República Faenquil e por me auxiliarem neste período de graduação. Dessa forma, sou grato ao Rafael Politi, Leonardo Sminka, Luiz Felipe Alves, William Abdala, Guilherme Cavinato, Felipe Cruz, Pedro Lee, Lucas Bissoli, Diego Garcia, Hugo Magalhães, João Pedro Noronha, Gustavo França, Igor Bonanno, Enzo Civitanova, Pedro Gonçalves.

Agradeço aos meus queridos amigos que me acompanharam nesta trajetória, Higor Natan, Vinicius Albuquerque, Thiago Gimaiel, Pedro Luís, Gustavo Sales, Guilherme Pinatti e Alberto Seletto. Ademais, sou grato pela amizade e conhecimento do Bruno Gomes Cordeiro e por me acompanhar nesta área de conhecimento desde o primeiro semestre da faculdade.

Especial nomeação à Comissão de Coordenação de Curso de Engenharia Física (CoC-EF) por todo o auxílio. Sem dúvidas, o apoio da Dra. Katia Cristiane Gandolpho Candioto e do Dr. Luiz Tadeu Fernandes Eleno me ajudaram a ser uma pessoa mais dedicada e exemplar para meus colegas de curso e de trabalho. Além disso, por participar de diversas entidades durante essa caminhada, adquiri um conhecimento burocrático e prático da perspectiva de uma vida acadêmica que estão além do conhecimento técnico e científico.

Além de todos estes agradecimentos, agradeço à Universidade de São Paulo (USP) e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela valiosa oportunidade de aperfeiçoamento profissional, acadêmico e pessoal.

“A ciência nos diverte e fascina, mas é a engenharia que muda o mundo.”

Isaac Asimov.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Referencial inercial	33
Figura 2 – Referencial fixo	34
Figura 3 – Referencial orbital	34
Figura 4 – Representação da sequência de rotação	35
Figura 5 – Dados de refletividade terrestre para o dia 31 de dezembro de 2001 obtido via TOMS	38
Figura 6 – Dados da refletividade terrestre média para o ano de 2001 obtido via TOMS	39
Figura 7 – Diagrama ilustrativo da incidência solar e fluxo do albedo terrestre em uma determinada área do plano	40
Figura 8 – Distribuição dos oito CSS no Amazonia 1	43
Figura 9 – Diagrama ilustrativo do ângulo de incidência $\alpha_{\text{irad},i}$ no sensor solar do Amazonia 1	44
Figura 10 – Campo magnético da Terra para o ano de 2001 obtido via IGRF	46
Figura 11 – Diagrama ilustrativo dos cossenos diretores formados a partir dos siste- mas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$	50
Figura 12 – Diagrama ilustrativo do vetor de rotação principal $\hat{e}$ com ângulo Φ e sistemas de coordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$	52
Figura 13 – Simulação das componentes de posição e velocidade do satélite para três órbitas do Amazonia 1 no sistema inercial	66
Figura 14 – Simulação das componentes de posição e velocidade do satélite para três órbitas do Amazonia 1 no sistema fixo	67
Figura 15 – Simulação das componentes dos quatérnions para três órbitas do Ama- zonias 1	67
Figura 16 – Simulação das componentes da velocidade angular para três órbitas do Amazonia 1	68
Figura 17 – Parâmetros do albedo terrestre. Campo de visão do satélite $\mathbf{V}_{\text{sat}}$, campo de visão do Sol $\mathbf{V}_{\text{Sun}}$ e a intersecção entre os dois campos de visão $\mathbf{V}_{\text{sat}} \cap \mathbf{V}_{\text{Sun}}$	69
Figura 18 – Resultado do albedo terrestre com as condições estabelecidas pela Figura 17	69
Figura 19 – Resultado do albedo terrestre com as condições estabelecidas em três dimensões relacionando latitude, longitude e irradiância	70
Figura 20 – Simulação da interferência do albedo terrestre para três órbitas do Amazonia 1	71

Figura 21 – Simulação da interferência do albedo terrestre em porcentagem para três órbitas do Amazonia 1	71
Figura 22 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do fluxo de energia Sol	72
Figura 23 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do albedo terrestre	72
Figura 24 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência do Sol e do albedo terrestre	73
Figura 25 – Simulação dos vetores solares sem a interferência do albedo terrestre e com a interferência do albedo terrestre, respectivamente	74
Figura 26 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o TRIAD sem a interferência do albedo terrestre	75
Figura 27 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o TRIAD com a interferência do albedo terrestre	75
Figura 28 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o Q-Method sem a interferência do albedo terrestre	76
Figura 29 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o Q-Method com a interferência do albedo terrestre	77
Figura 30 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o QUEST sem a interferência do albedo terrestre	77
Figura 31 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o QUEST com a interferência do albedo terrestre	78
Figura 32 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando a solução analítica de Yang e Zhou (2013) para a determinação de atitude sem a interferência do albedo terrestre	79
Figura 33 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando a solução analítica de Yang e Zhou (2013) com a interferência do albedo terrestre	79

Lista de tabelas

Tabela 1	– Elementos keplerianos de referência do Amazonia 1	65
Tabela 2	– Condições iniciais de referência	66
Tabela 3	– Corrente média gerada por cada sensor solar para três órbitas do Amazonia 1 para a interferência do Sol e do albedo terrestre e a taxa em porcentagem de interferência para o albedo terrestre e para o Sol	73
Tabela 4	– Tempo médio para cada um dos métodos desenvolvidos neste trabalho . . .	80
Tabela 5	– Média dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler sem a interferência do albedo terrestre	80
Tabela 6	– Média dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler com a interferência do albedo terrestre	81
Tabela 7	– Desvios-padrão dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler com a interferência do albedo terrestre	81

Lista de abreviaturas e siglas

CERES	<i>Clouds and the Earth's Radiant Energy System</i>
CSS	<i>Coarse Solar Sensor</i>
ECI	<i>Earth Centered Inertial</i>
ECEF	<i>Earth Centered Earth Fixed</i>
DCM	<i>Directional Cosine Matrix</i>
FKE	Filtro de Kalman Estendido
FOV	<i>Field of View</i>
IGRF	<i>International Geomagnetic Reference Field</i>
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NASDA	<i>National Space Development Agency of Japan</i>
QUEST	<i>QUaternion ESTimator</i>
TOMS	<i>Total Ozone Mapping Spectrometer</i>
TRIAD	<i>TRIAxial Attitude Determination</i>
TRMM	<i>Tropical Rainfall Measuring Mission</i>

Lista de símbolos

$\hat{\mathbf{b}}$	Versor do sistema do corpo
c	Soma dos elementos opostos da matriz $\mathbf{B}$
e	Excentricidade
$\hat{\mathbf{e}}$	Eixo de rotação principal
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Vetores unitários do Sistema do Satélite
$\vec{e}_{x_o}, \vec{e}_{y_o}, \vec{e}_{z_o}$	Vetores unitários do Sistema Orbital
$\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$	Vetores unitários do Sistema de Referência Inercial
f	Fração da irradiância que atinge a superfície do satélite
$g(\cdot)$	Ganho da função
i_0	Corrente inicial dos sensores solares
i_k	Corrente no sensor solar k , tal que $k \in [1, 8]$
$\hat{\mathbf{n}}$	Versor do sistema inercial
$\hat{\mathbf{n}}_{\text{J}}$	Normal na superfície do satélite
$\mathbf{q}$	Quatérnion
$\dot{\mathbf{q}}$	Taxa de variação do quatérnion
$\vec{q}$	Parcela vetorial do quatérnion
q_4	Parcela escalar do quatérnion
r_E	Raio médio da Terra
$\mathbf{r}_{\text{Sun}}$	Vetor definido entre a distância da Terra até o Sol
$\mathbf{s}_j$	Tríade definida para o sistema no inercial
t	Tempo
$\mathbf{t}_j$	Tríade definida para o sistema no corpo
$\mathbf{v}^{\mathcal{B}}$	Vetor no sistema do corpo

$\boldsymbol{v}^{\mathcal{N}}$	Vetor no sistema do inercial
$\boldsymbol{w}_j$	Peso para a função custo
$\boldsymbol{x}$	Vetor de estados
$\boldsymbol{x}_k$	Vetor de estados para o tempo k
$\hat{\boldsymbol{x}}_k$	Vetor de estados estimado para o tempo k
$\boldsymbol{x}_0$	Vetor de estados inicial
$\hat{\boldsymbol{x}}_0$	Vetor de estados inicial estimado
$\boldsymbol{A}$	Matriz de Atitude
$A_c(\phi_g, \theta_g)$	Área da região do plano definido por $\boldsymbol{D}$
$\mathcal{B}$	Referência no corpo rígido
$\boldsymbol{C}$	Matriz que define diversos processos do Q-Method e QUEST
$\boldsymbol{D}$	Plano com os pontos do albedo terrestre
E_a	Albedo terrestre total na superfície do satélite
E_{AM0}	Constante da incidência solar
E_{dd}	Irradiância difusa e direta
E_{dd0}	Irradiância espalhada
E_c	Fluxo de fótons refletidos pela superfície da Terra
E_r	Irradiância refletida
E_{sat}	Intensidade do albedo terrestre no satélite
$E(\cdot)$	Operador esperança
$\boldsymbol{I}$	Matriz identidade
$\boldsymbol{I}_{n \times n}$	Matriz identidade $n \times n$
$L(\boldsymbol{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}})$	Função de custo definida para o Problema de Wahba
$\boldsymbol{M}_1(\psi)$	Primeira rotação de um ângulo ψ em torno do eixo $\boldsymbol{z}_o$
$\boldsymbol{M}_2(\theta)$	Segunda rotação de um ângulo θ em torno do eixo intermediário $\boldsymbol{y}'$
$\boldsymbol{M}_3(\phi)$	Terceira rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo $\boldsymbol{z}$

$\mathcal{N}$	Referência no sistema inercial
$\mathbf{O}$	Centro de massa no satélite
$\mathbf{O}'$	Centro de massa da Terra
$\mathbf{Oxyz}$	Sistema do Satélite
$\mathbf{Ox_o y_o z_o}$	Sistema Orbital
$\mathbf{O'XYZ}$	Sistema de Referência Inercial
$\mathbf{O'X_F Y_F Z_F}$	Sistema de Referência Inercial
$\mathbf{P_c}(\phi_g, \theta_g)$	Energia radiante causada pelo fluxo de fótons do Sol
$\mathbf{S}$	Todas as tríades $\mathbf{s}_n$ do TRIAD
S	Fração da irradiância que é refletida pela superfície do satélite
S	Primeiro sistema para rotação
S'	Segundo sistema para rotação
S_X	Componente do vetor solar em $\mathbf{X}$
S_Y	Componente do vetor solar em $\mathbf{Y}$
S_Z	Componente do vetor solar em $\mathbf{Z}$
S_{0_x}	Componente do vetor solar em $\mathbf{x}_o$
S_{0_y}	Componente do vetor solar em $\mathbf{y}_o$
S_{0_z}	Componente do vetor solar em $\mathbf{z}_o$
$\mathbf{T}$	Todas as tríades $\mathbf{t}_n$ do TRIAD
$\mathbf{U}$	Soma da matriz $\mathbf{B}$ transposta mais a matriz $\mathbf{B}$
$\mathbf{V}$	Vetor que define os ruídos v_k
$\mathbf{V}_{\text{sat}}$	Campo de visão do satélite
$\mathbf{V}_{\text{Sun}}$	Campo de visão do Sol
$\mathbf{Z}$	Vetor que define as correntes i_k
α_c	Ângulos formados entre a incidência solar e a normal da Terra
$\alpha_{\text{irad},k}$	Ângulos formados entre a incidência solar e a normal do sensor solar com $k \in [1, 8]$

α_{sat}	Ângulos formados entre a incidência solar e a normal na superfície do satélite
α_{Sun}	Ângulos formados entre o vetor posição do Sol solar e a normal na superfície da Terra
α_{ij}	Ângulos formados entre os versores do corpo e inercia
θ_{g}	Ponto do albedo terrestre na latitude g
θ	Ângulo <i>pitch</i>
$kappa$	Traço da matriz adjunta de $\mathbf{U}$
ξ	Autovalor
σ	Traço da matriz $\mathbf{B}$
ρ	Soma do autovalor máximo mais o traço da matriz $\mathbf{B}$
ρ	Parâmetro de irradiância solar
ϕ_{g}	Ponto do albedo terrestre na longitude g
ϕ	Ângulo <i>roll</i>
ψ	Ângulo <i>yaw</i>
ω	Velocidade angular do satélite
ω_x	Componente da velocidade angular do satélite no eixo x (eixo de <i>roll</i>)
ω_y	Componente da velocidade angular do satélite no eixo y (eixo de <i>pitch</i>)
ω_z	Componente da velocidade angular do satélite no eixo z (eixo de <i>yaw</i>)
$\Delta\theta_{\text{g}}$	Resolução na longitude
$\Delta\phi_{\text{g}}$	Resolução na latitude
$\Delta\Omega_i$	Deslocamentos angulares medidos no eixo do satélite ($i = x, y, z$)
$\Delta\mathbf{i}$	Diferença entre as correntes dos sensores que estão opostos
Γ_k	Matriz associada a matriz de covariância $\mathbf{Q}_k$
Θ	Conjunto de dados da longitude
Φ	Ângulo de rotação principal
Φ	Conjunto de dados da latitude

Φ_k	Matriz de transição de estados para o tempo k
Ω_ω	Matriz antissimétrica transposta 4×4
$\mathbf{0}_{n \times n}$	Matriz de zeros ($n \times n$)

Resumo

RIBEIRO, G. A. X. **Análise da interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1**. 2022. 93 p. Monografia (Trabalho de Graduação de Engenharia Física) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2022.

A dinâmica do movimento rotacional do satélite em relação a um sistema de referência inercial é denominada de atitude. A determinação de atitude é de suma importância para a supervisão e controle de um satélite artificial, visto que através destas análises é possível determinar possíveis falhas no sistema a bordo e erros indesejados. O albedo terrestre é a reflexão dos fótons oriundos do Sol que se chocam com a superfície e atmosfera da Terra e que são refletidos novamente para o espaço. Os efeitos do albedo terrestre são consideráveis em todos os satélites que orbitam a Terra, visto que os fótons refletidos possuem uma energia radiante que causam uma força de pressão de radiação na superfície do satélite. A força de pressão de radiação solar varia com o movimento translacional da Terra em relação ao Sol e oscila também com o movimento orbital do satélite em relação à Terra. Essa força causada pela energia radiante dos fótons influencia na energia gerada pelos painéis solares, gera calor através de radiação na superfície do satélite e perturba o campo de visão dos sensores solares. Geralmente, o albedo terrestre é tratado como um ruído na determinação de atitude de um satélite. Entretanto, com a modelagem matemática do albedo terrestre, é possível calcular a interferência deste efeito na superfície do satélite e utilizar o albedo para referência de navegação. Os dados de refletividade obtidos através do satélite *Earth Probe satellite* no projeto *Total Ozone Mapping Spectrometer* (TOMS) disponibilizados pela Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (*National Aeronautics and Space Administration* - NASA) possibilitam a análise da interferência do albedo na estimação de atitude do satélite Amazonia 1. A estimação de atitude e todas as características orbitais intrínsecas do Amazonia 1 são desenvolvidas via software MATLAB. Neste trabalho, o objetivo principal é analisar a interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1 com métodos de determinação de atitude estática que solucionam o problema de Wahba. Dessa forma, por meio de simulações, os resultados obtidos auxiliam a entender qual é o melhor método para as condições impostas. Nota-se que o QUEST apresentou a melhor precisão do que quando comparado com o TRIAD, Q-Method e a solução analítica do Problema de Wahba.

Palavras-chave: Albedo Terrestre. TRIAD. Q-Method. QUEST. Amazonia 1.

Abstract

RIBEIRO, G. A. X. **Analysis of earth albedo interference in Amazonia 1 satellite attitude determination**. 2022. 93 p. Monograph (Undergraduate Thesis in Engineering Physics) – Engineering School of Lorena, University of São Paulo, Lorena, 2022.

The dynamics of the satellite's rotational movement relative to an inertial reference system is called attitude. The determination of attitude is of utmost importance for the supervision and control of an artificial satellite, since through these analyses it is possible to determine possible failures in the onboard system and unwanted errors. The earth albedo is the reflection of photons coming from the Sun that collide with the Earth's surface and atmosphere and are reflected back into space. The effects of earth albedo are considerable on all satellites orbiting the Earth, as the reflected photons have a radiant energy that causes a radiation pressure force on the satellite surface. The solar radiation pressure force varies with the translational motion of the Earth relative to the Sun and also oscillates with the orbital motion of the satellite relative to the Earth. This force caused by the radiant energy of photons influences the power generated by the solar panels, generates heat through radiation on the satellite surface, and disturbs the field of view of the solar sensors. Generally, the Earth's albedo is treated as a noise in determining a satellite's attitude. However, with mathematical modeling of the Earth's albedo, it is possible to calculate the interference of this effect on the surface of the satellite surface and use the albedo as a reference for navigation. The reflectivity data obtained from the Earth Probe satellite in the Total Ozone Mapping Spectrometer (TOMS) project made available by the National Aeronautics and Space Administration (NASA) make it possible to analyze the albedo interference in the attitude estimation of the Amazonia 1 satellite. The attitude estimation and all the intrinsic orbital characteristics of Amazonia 1 are developed via MATLAB software. In this work, the main objective is to analyze the interference of terrestrial albedo on the attitude estimation of the Amazonia 1 satellite with static attitude estimation methods that solve Wahba's problem. In this way, through simulations, the results obtained help to understand which is the best method for the imposed conditions. It can be seen that QUEST presented the best accuracy when compared to TRIAD, Q-Method and the analytical solution of the Wahba Problem.

Keywords: Earth's Albedo. TRIAD. Q-Method. QUEST. Amazonia 1.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Objetivos	26
1.2	Justificativa	26
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
3	SISTEMAS DE REFERÊNCIA	33
3.1	Referencial Inercial	33
3.2	Referencial Fixo	33
3.3	Referencial Orbital	34
3.4	Referencial do Satélite	35
4	MODELO MATEMÁTICO DO ALBEDO TERRESTRE	37
5	MODELO MATEMÁTICO DOS SENSORES	43
5.1	Modelo do Sensor Solar	43
5.2	Modelo do Magnetômetro	45
6	REPRESENTAÇÕES DE ATITUDE	49
6.1	Atitude Representada por Matriz de Cossenos Diretores	49
6.2	Atitude Representada por Quatérnions	51
6.2.1	Dinâmica de Atitude em Quatérnions	54
7	MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE	57
7.1	Métodos Estáticos para Determinação de Atitude	57
7.1.1	TRIAD	58
7.1.2	Q-Method	59
7.1.3	QUEST	60
7.1.4	Solução Analítica para o Problema de Wahba descrita por Yang e Zhou (2013)	62
8	RESULTADOS	65
8.1	Condições simuladas	65
8.2	Albedo Terrestre	66
8.3	Dados dos Sensores Solares	70
8.4	TRIAD	74
8.5	Q-Method	75
8.6	QUEST	76

8.7	Solução Analítica para o Problema de Wahba descrita por Yang e Zhou (2013)	78
8.8	Discussão de resultados	80
9	CONCLUSÕES	83
9.1	Trabalhos Futuros	84
	REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

A dinâmica do movimento rotacional do satélite em relação a um sistema de referência inercial é denominada de atitude. Neste aspecto, a determinação de atitude é de suma importância para a supervisão e controle de um satélite artificial, visto que através destas análises é possível determinar possíveis falhas no sistema a bordo e erros indesejados.

Usualmente, define-se a determinação de atitude em duas categorias: estática ou estocástica. A primeira categoria é relacionada para medidas que são feitas no mesmo período ou em intervalos de tempo pequenos, tal que o movimento do satélite entre as medidas pode ser ignorada ou compensada pelo controle de atitude. A segunda categoria é relacionada com o termo “estimação” que é restrito para determinação de atitude de maneira estocástica, seja ela feita com um filtro de Kalman ou um método de máxima verossimilhança ([MARKLEY; CRASSIDIS, 2014](#); [SHUSTER, 1989](#)).

O efeito do albedo terrestre perturba significativamente os sensores solares. Nessa perspectiva, quando são utilizados sensores com amplo campo de visão para determinar o Sol em qualquer instante, sempre haverá uma interferência do albedo terrestre causada pela reflexão dos fótons que se chocam com a superfície e essa é a maior perturbação para a estimação de atitude.

Neste trabalho, é feita uma análise da interferência do albedo terrestre no satélite Amazonia 1. O principal objetivo do satélite Amazonia 1 é prover dados de sensoriamento remoto, esses dados são disponibilizados diariamente e gratuitamente na internet para que seja acessado por quaisquer áreas, sejam elas acadêmicas ou industriais. O Amazonia 1 é um satélite de órbita terrestre baixa (*Low Earth Orbit* - LEO) com altitude aproximada de 750 km e que opera em uma órbita sol síncrona congelada com horário de passagem às 10:30 da manhã na descendente, ou seja, quando o satélite cruza o Equador terrestre do Norte para o Sul. O seu ciclo completo é de cinco dias o que garante uma periodicidade importante para análises observacionais de desmatamento da região Amazônica e de outras regiões da Terra ([INPE, 2022](#)).

A determinação de atitude calculada nesse trabalho é feita através do sensor solar e do magnetômetro, sensores de atitude que possuem menos precisão do que quando comparados com o sensor de estrela. Destaca-se a importância da utilização destes dois sensores para uma determinação de atitude robusta, já que a influência do albedo terrestre pode ser muito ruim para identificar falhas nos sensores de estrela. Nesta pesquisa, é aplicado o TRIAD, Q-Method, QUEST e um método desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) para determinar a atitude do Amazonia 1 com a atitude representada por quatérnions e

os dados de telemetria e efemérides são simulados através do PROPAT desenvolvido por Carrara (2015).

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é determinar a interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1 com diferentes métodos. Os métodos considerados neste trabalho são métodos de determinação estática em que a atitude é parametrizada via quatérnions.

Dessa forma, algumas metas foram estabelecidas para este trabalho:

- Desenvolver um simulador de órbita e de atitude, com base no algoritmo PROPAT desenvolvido por Carrara (2015), com todas as características intrínsecas do Amazonia 1 e que simule os sensores solares e magnetômetros presentes no Amazonia 1.
- Determinar a interferência do albedo terrestre total em cada instante da órbita do Amazonia 1 com base em algoritmos desenvolvidos por Bhandari (2005) para que seja possível determinar características importantes da interferência do albedo na superfície do satélite.
- Com os resultados obtidos via simulação do PROPAT, simular a interferência do Sol e do albedo terrestre em cada instante para todos os sensores do satélite Amazonia 1 e calcular a taxa de interferência em cada um destes sensores.
- Realizar o cálculo do vetor de campo magnético com base no modelo do *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF) para simular o campo magnético da Terra no período orbital determinado para o Amazonia 1.
- Determinar a atitude com base no TRIAD, Q-Method, QUEST e um método desenvolvido por Yang e Zhou (2013) para realizar uma análise comparativa com os resultados obtidos via PROPAT e determinar a eficiência destes métodos perante a interferência do albedo terrestre em cada instante da órbita do Amazonia 1.

1.2 Justificativa

A determinação de atitude é importante para uma missão espacial de sucesso e determinar a atitude para determinadas condições é essencial para prever falhas e erros indesejados no sistema a bordo. Além disso, aumenta a vida útil do satélite, evita o desgaste desnecessário de equipamentos para realizar manobras para corrigir a atitude do satélite.

A determinação de atitude calculada nesse trabalho é feita através do sensor solar e do magnetômetro, sensores de atitude que possuem menos precisão do que quando comparados com o sensor de estrela. É essencial que a determinação de atitude robusta feita com base nesses sensores sejam precisas, já que dependendo da interferência do albedo terrestre, os sensores de estrela possivelmente vão apresentar grandes intervalos de erros para a detecção de falhas.

Deste modo, é considerado o modelo do albedo terrestre para que a determinação de atitude seja mais precisa, já que muitas vezes é considerado como um ruído nesta determinação. Nessa perspectiva, uma análise da interferência do albedo no movimento rotacional do satélite é imperativa.

Ademais, como muitos dos satélites de sensoriamento remoto buscam o posicionamento ótimo do painel solar, o fluxo de correntes geradas pela energia radiante do albedo terrestre interfere neste movimento rotacional.

2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo tem como finalidade apresentar os principais trabalhos que foram encontrados na literatura e que possuem determinada relevância para este trabalho. Nesse contexto, são feitos breves resumos de alguns trabalhos que analisam o Albedo Terrestre, o TRIAD, o Q-Method, QUEST e o método desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) para determinar a atitude em ordem cronológica.

A maioria dos algoritmos que utilizam métodos estáticos para a determinação de atitude são baseados no problema que foi desenvolvido por [Wahba \(1965\)](#). O problema de Wahba consiste em encontrar uma matriz de atitude com determinante +1 que minimiza a função de custo.

No trabalho de [Potter e Velde \(1968\)](#) é desenvolvido uma extensão para o Filtro de Kalman que considera os erros envolvidos no sistema dinâmico e que tais cálculos foram usados na missão Apollo. [Farrell \(1970\)](#) desenvolve uma maneira de calcular o sistema dinâmico não linear da atitude baseada no Filtro de Kalman, utilizando ruídos aleatórios nas medidas, mas sem considerar os erros atribuídos ao sistema dinâmico.

Uma das soluções para minimizar o problema de Wahba é o Q-Method que calcula diretamente a atitude ótima do quatérnio minimizando o problema de Wahba. O Q-Method foi desenvolvido por Paul Davenport em 1968 e foi o primeiro a solucionar o problema de Wahba para a determinação de atitude de um satélite, entretanto o método foi apenas divulgado em [Lerner \(1978\)](#).

[Shuster e Oh \(1981\)](#) faz uma análise sobre métodos determinísticos para a determinação de atitude. O QUEST (*Quaternion ESTimator*) é desenvolvido neste artigo e é demonstrado que este método é mais efetivo e preciso do que o Q-Method para o cálculo da atitude.

Em [Lefferts, Markley e Shuster \(1982\)](#) é feita uma abordagem da estimação de atitude de um satélite com o uso dos quatérnios com diferentes estratégias. Inicialmente, desenvolve-se o Filtro de Kalman Estendido para a representação da matriz de covariância quando o vetor de estado tem dimensão 7, entretanto essa matriz é singular. Dessa forma, apresenta-se dois métodos distintos para evitar a singularidade associada a dimensão da matriz. A primeira maneira é através da representação da matriz de covariância reduzida e a segunda maneira é através de um incremento de quatérnio.

Em [Fisher, Musser e Shuster \(1993\)](#), a estimação de atitude é baseada através do sensor Solar e medidas robustas do albedo terrestre. Através destas medidas, é possível determinar a atitude de um satélite e comparar os resultados com medidas de atitude

reais, a média do erro por eixo é de cerca de 11 graus.

O artigo de [Bar-Itzhack e Harman \(1997\)](#) baseia-se em um método otimizado para determinar atitude com base no TRIAD. O algoritmo se baseia em solucionar o TRIAD duas vezes, uma com um vetor como base e o outro TRIAD que considera como base a primeira simulação e depois calcula-se os pesos com base na ortogonalização da matriz final. Os resultados demonstram que o TRIAD otimizado são melhores do que apenas com a determinação de atitude via TRIAD.

[Markley \(1998\)](#) apresenta algumas maneiras de determinar a atitude através de dois vetores de medida distintos: pelo TRIAD, pelo TRIAD otimizado com a solução do problema de Wahba, o TRIAD otimizado baseado no algoritmo desenvolvido por [Bar-Itzhack e Harman \(1997\)](#) e através do método Reynolds. O artigo demonstra a superioridade do TRIAD, QUEST e da estimação com métodos utilizando os quatérnions para determinação de atitude com base em dois vetores de medida, sendo amplamente utilizados o vetor de campo magnético e o vetor solar.

[Brasoveanu e Sedlak \(1998\)](#) analisam a interferência do albedo terrestre nas medidas do sensor solar. Para realizar este estudo, é descrito um modelo matemático do albedo terrestre e utiliza-se os dados fornecidos pelo projeto TRMM (*Tropical Rainfall Measuring Mission*) desenvolvido pela Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (*National Aeronautics and Space Administration* - NASA) e pela Agência Nacional de Desenvolvimento do Espaço do Japão (*National Space Development Agency of Japan* - NASDA) que tem como principal objetivo compreender o sistema dinâmico da Terra. Entretanto, o TRMM não é uma base de dados adequada para analisar o albedo terrestre e, por isso, os autores concluem que os modelos de previsões são baseados no coeficiente médio do albedo terrestre e através da precisão dos sensores solares sendo recomendado a análise robusta com uma base de dados adequada.

Na tese de [Bhandari \(2005\)](#), é feita uma análise robusta da interferência do albedo terrestre a partir das medidas de refletividade obtidas através do satélite *Earth Probe satellite* no projeto *Total Ozone Mapping Spectrometer* (TOMS) que possui dados disponíveis virtualmente disponibilizados pela NASA. Ademais, analisa-se a determinação de atitude quando o albedo terrestre é considerado na superfície do satélite. Para isso, utiliza-se três métodos, o Q-Method, o Filtro de Kalman Estendido e o Filtro de Kalman *Unscented*. Os resultados demonstram um erro de atitude menor do que quando comparados com métodos que não utilizam o modelo do albedo terrestre.

No artigo de [Appel \(2005\)](#), é feita a determinação de atitude com base no vetor do campo magnético e com o vetor do Sol. Para reduzir o erro nas medidas do sensor solar, é considerado o modelo do albedo terrestre. Dessa forma, os resultados demonstram que quando o albedo terrestre é considerado na estimação de atitude, os erros relacionados à atitude diminuem significativamente, o que demonstra uma acurácia melhor para os casos

em que o fluxo do albedo terrestre é considerado.

Em [Rocco \(2010\)](#) é analisado o modelo do albedo terrestre a partir do TOMS. Neste trabalho, é aplicado este modelo em algumas missões espaciais específicas em Gravity Probe B, MICROSCOPE, STEP e outras missões. Os resultados da aplicação apresentam uma elevada precisão.

[Garcia, Kuga e Zanardi \(2011\)](#) analisa dados reais dos satélites CBERS-2 e CBERS-2B para estimar a atitude através dos sensores que estão a bordo do satélite. Neste trabalho, é feito uma comparação entre o Filtro de Kalman Estendido e o Filtro de Kalman Sigma Ponto com uma quantidade limitada e escassa de medidas obtidas através das efemérides e telemetria dos satélites CBERS-2 e CBERS-2B. Observa-se que o algoritmo do Filtro de Kalman Sigma Ponto, com condições iniciais com baixa precisão, é capaz de convergir e fornecer estimativas de atitude com uma precisão elevada quando comparado com o FKE.

O artigo desenvolvido por [Lopes et al. \(2012\)](#) tem como objetivo principal determinar a interferência do albedo terrestre em cada um dos oito sensores solares presentes no satélite Amazonia 1. São considerados alguns algoritmos para determinar o vetor da posição do Sol considerando ou não o albedo terrestre e a interferência em cada um dos sensores quando o albedo é considerado na determinação do vetor solar. Os dados do albedo terrestre baseiam-se no TOMS e utilizam dados simulados do Amazonia 1.

[Khalifa e Sharaf-Eldin \(2013\)](#) apresenta a análise do albedo terrestre com dados do projeto TOMS em satélites CubeSats de órbita baixa (*Low Earth Orbit* - LEO). Os resultados demonstram que a contribuição da força de pressão de radiação causada pelo albedo terrestre pode gerar significativas perturbações em satélites menores e que podem afetar a vida útil do satélite.

Em [Silva \(2016\)](#) é analisado alguns filtros para a estimação de atitude do satélite CBERS-2 utilizando dados simulados e reais. O Filtro H_∞ Estendido, Filtro de Kalman Estendido, Filtro de Partículas, Filtro de Kalman *Unscented* são utilizados para fazer essa análise. Nesse trabalho, o vetor de estado é determinado pelos ângulos de Euler e pelo *bias* do giroscópio. O autor mostra que os resultados das estimativas de diferentes filtros convergem e que a atitude estimada está em concordância com trabalhos que foram realizados anteriormente.

[Yang \(2019\)](#) demonstra as principais maneiras de determinar o controle e atitude de um satélite usando o modelo dos quatérnions. Nesse contexto, o trabalho é elaborado de tal forma que é feita toda uma abordagem de mecânica celeste, descrição de atitude, modelo das equações cinemáticas e dinâmicas, torques, determinação estática e estocástica da atitude e controle de um satélite.

No artigo desenvolvido por [Cilden-Guler et al. \(2021\)](#), os dados do albedo terrestre são obtidos via CERES (*Clouds and the Earth's Radiant Energy System*) desenvolvido

pela NASA. A atitude é estimada a partir de duas configurações diferentes do sensor e são baseadas no Filtro de Kalman Estendido. As principais conclusões dos autores são que o método aplicado geram um erro de 4 graus nas medidas sem a correção regressiva e de apenas 2 graus quando o método AR é utilizado.

Em [Ribeiro, Silva e Candioto \(2021\)](#) é feita uma interface gráfica no *software* Python interativa que, a partir de uma informação inicial fornecida pelo o usuário, o algoritmo retorna os principais parâmetros de atitude correspondentes para a informação fornecida. Além disso, as manipulações de coordenadas de atitude do satélite são fornecidas de maneira eficiente e rapidamente.

[Ribeiro, Kuga e Garcia \(2022\)](#) fazem uma abordagem sobre a interferência das matrizes de covariância do Filtro de Kalman Estendido. Em relação a robustez do FKE, nota-se que a alteração das matrizes de covariância do ruído do processo $\mathbf{Q}$ e matriz de covariância do ruído da medida $\mathbf{R}$ afetam diretamente os resíduos dos sensores. Ademais, a alteração destas matrizes de covariância implica na convergência ou divergência das estimativas de atitude e do *bias* dos giros.

Ademais, é válido ressaltar que outros métodos para a solução do problema de Wahba como os desenvolvidos por [Markley \(1988\)](#), [Markley \(1993\)](#), [Yang \(2015\)](#), [Wu et al. \(2017\)](#) não são considerados neste trabalho, mas destaca-se a importância matemática e computacional para cada um destes trabalhos para a solução deste problema.

Este trabalho faz uma abordagem diferente dos demais trabalhos, já que o objetivo principal é analisar a interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1 com os métodos de Q-Method e TRIAD, QUEST e o método desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#). Dessa forma, é feita uma análise dos erros com a definição de uma atitude de referência obtido via PROPAT e é analisado o tempo computacional para cada um dos processos.

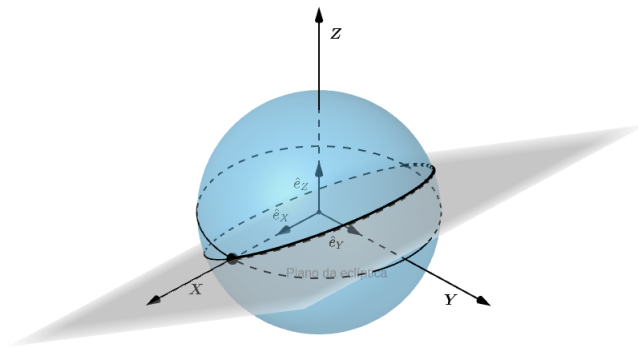
3 Sistemas de Referência

A atitude é a relação do movimento rotacional do satélite quando associado a diferentes sistemas de referência. Neste contexto, é de suma importância definir os sistemas referenciais para análise e controle do movimento rotacional do satélite, uma vez que é a partir dos sistemas de coordenadas que é possível prever irregularidades e possíveis problemas na posição e na atitude do satélite. Este capítulo apresenta os sistemas de referência que são usados neste trabalho.

3.1 Referencial Inercial

O referencial inercial (*Earth Centered Inertial* - ECI) é um sistema de referência fixo que tem origem no centro de massa da Terra, a sua representação é dada por $\mathbf{O'XYZ}$. O sistema de coordenadas é estabelecido de maneira que não sofre alteração com o céu estelar. O eixo $\mathbf{Z}$ aponta na direção do polo norte geográfico, o eixo $\mathbf{X}$ aponta para o ponto vernal e o eixo $\mathbf{Y}$ completa o sistema dextrógiro. Sua base ortonormal é representada como $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ (ALMEIDA, 2003). A Figura 1 representa o referencial inercial com origem no centro de massa da Terra.

Figura 1 – Referencial inercial



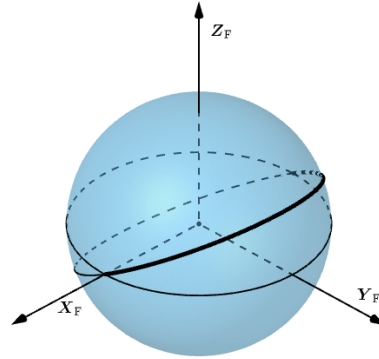
Fonte: Autor

3.2 Referencial Fixo

O referencial fixo na Terra (*Earth Centered Earth Fixed* - ECEF) é um referencial que gira em relação ao ECI com a velocidade angular da Terra, a sua representação é dada por $\mathbf{O'X_FY_FZ_F}$. O eixo $\mathbf{Z_F}$ aponta na direção do polo norte geográfico, o eixo $\mathbf{X_F}$ e o eixo

$\mathbf{Y}_F$ estão alinhados com o ECI. A Figura 2 representa o referencial fixo com origem no centro de massa da Terra.

Figura 2 – Referencial fixo

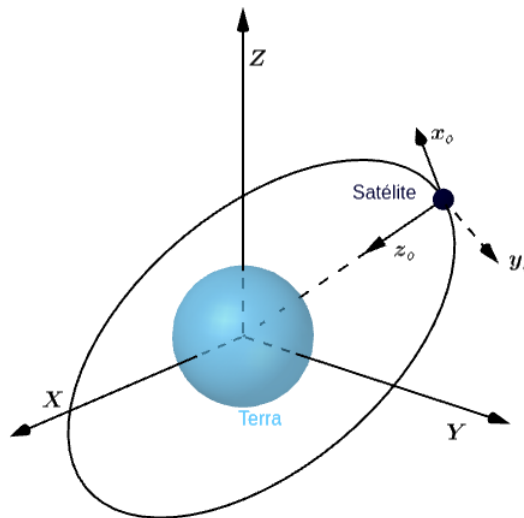


Fonte: Autor

3.3 Referencial Orbital

O referencial orbital é um sistema de referência que tem origem no centro de massa do satélite e é representado por $\mathbf{Ox}_o\mathbf{y}_o\mathbf{z}_o$. O eixo $\mathbf{z}_o$ aponta diretamente para o centro da Terra (direção Nadir), o eixo $\mathbf{y}_o$ aponta na direção normal a órbita e o eixo $\mathbf{x}_o$ completa o sistema dextrógiro. Sua base ortonormal é representada como $(\vec{e}_{x_o}, \vec{e}_{y_o}, \vec{e}_{z_o})$ (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011). A Figura 3 representa o referencial orbital.

Figura 3 – Referencial orbital



Fonte: Autor

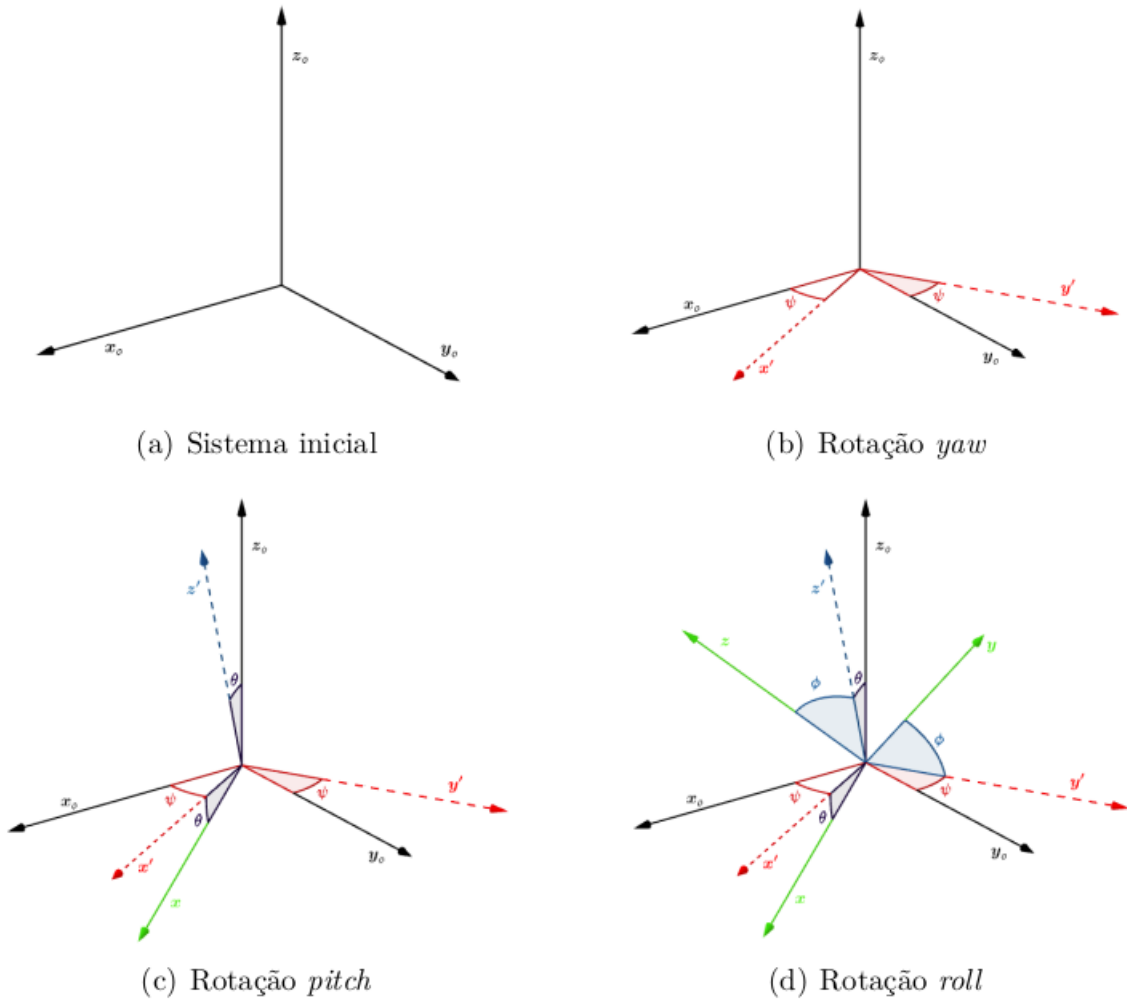
3.4 Referencial do Satélite

O referencial do satélite é um sistema de referência que tem origem no centro de massa do satélite, o seu sistema é representado por **Oxyz**. No caso de satélites que apontam para a Terra, é usualmente definido os eixos de *roll*, *pitch* e *yaw*. Dessa forma, é possível definir (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011):

- Primeira rotação de um ângulo ψ (ângulo *yaw*) em torno do eixo $\mathbf{z}_o$;
- Segunda rotação de um ângulo θ (ângulo *pitch*) em torno de um eixo intermediário $\mathbf{y}'$;
- Terceira rotação de um ângulo ϕ (ângulo *roll*) em torno do eixo $\mathbf{x}$;

A sequência de rotação adotada (ϕ, θ, ψ) é representada na Figura 4.

Figura 4 – Representação da sequência de rotação



Dessa forma, define-se o referencial do satélite que é utilizado para a compreensão da atitude representada por ângulos de Euler.

4 Modelo Matemático do Albedo Terrestre

O albedo terrestre é o efeito causado pela reflexão dos fótons oriundos do Sol que se chocam com a superfície e atmosfera da Terra. Os efeitos do albedo terrestre são consideráveis em todos os satélites que orbitam a Terra, visto que os fótons refletidos possuem uma energia radiante que causam uma força de pressão de radiação na superfície do satélite. A força de pressão de radiação solar varia com o movimento translacional da Terra em relação ao Sol e oscila também com o movimento orbital do satélite em relação a Terra. Essa força causada pela energia radiante dos fótons influencia na energia gerada pelos painéis solares, causa o torque de pressão de radiação solar e gera calor através de radiação na superfície do satélite (GEORGEVIC, 1971; WERTZ, 2012; RIBEIRO; GARCIA; KUGA, 2021).

O albedo terrestre, geralmente, é tratado como um ruído na determinação de atitude de um satélite. Entretanto, com a modelagem matemática do albedo terrestre, é possível calcular a interferência deste efeito na superfície do satélite e utilizar o albedo para referência de navegação (BHANDERI; BAK, 2005). Como a Terra tem a forma de um geoide, ou seja, tem uma superfície irregular e não é tratada como uma esfera perfeita, o albedo possui diversas direções.

O modelo do albedo terrestre é baseado nos dados de refletividade obtidos pelo projeto *Total Ozone Mapping Spectrometer* (TOMS) relacionados ao satélite *Earth Probe satellite* que possui dados disponíveis virtualmente disponibilizados pela Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (*National Aeronautics and Space Administration* - NASA). Os dados eram disponibilizados desde o dia 25 de Julho de 1996, contudo o projeto foi descontinuado em 2005 (NASA, 2019). Os dados obtidos possuem a resolução de $\Delta\phi_g = 1^\circ$ na latitude e $\Delta\theta_g = 1,25^\circ$ na longitude, ou seja, 180×288 dados, já que a latitude varia de 0° até 90° para o Norte ou para o Sul (totalizando 180 pontos) e a longitude varia de 0° até 180° para Leste ou para o Oeste (totalizando 360 pontos). O plano pode ser definido por um espaço com duas dimensões $\mathbf{D}$ com os pontos $\Phi \times \Theta$, tal que (BHANDERI; BAK, 2005)

$$\Phi = \{0, \Delta\phi_g, 2\Delta\phi_g, \dots, 179\Delta\phi_g\}, \quad (4.1)$$

$$\Theta = \{0, \Delta\theta_g, 2\Delta\theta_g, \dots, 287\Delta\theta_g\}. \quad (4.2)$$

Cada dado $(\phi_g, \theta_g) \in \mathbf{D}$ é a média da refletância de uma célula, $\phi_g \pm \Delta\phi_g/2$ e $\theta_g \pm \Delta\theta_g/2$, os dados da Terra estão disponíveis no TOMS.

A energia da radiação causada pelo albedo terrestre na superfície do satélite é calculada pelo parâmetro ρ que é dada por uma constante de irradiância. A medida da

energia E_{meas} pode ser calculada por (BHANDERI; BAK, 2005)

$$E_{\text{meas}} = \frac{\rho f}{1 - S\rho} E_{\text{dd}} + E_{\text{dd}0}, \quad (4.3)$$

tal que ρ é a constante da refletividade da superfície do satélite, f é a fração da irradiância que atinge o satélite, S é a fração da irradiância que é refletida de volta para a superfície refletora, que é conhecida como parâmetros de Stokes, E_{dd} é a irradiância difusa e direta que atinge a superfície refletora e $E_{\text{dd}0}$ é a irradiância que é espalhada pela superfície do satélite (BHANDERI; BAK, 2005; HERMAN et al., 2001).

Ademais, a irradiância total atingindo a superfície é a soma de E_{dd} e a soma infinita da irradiância refletida entre a atmosfera e a superfície, tal que a irradiância refletida é expressa

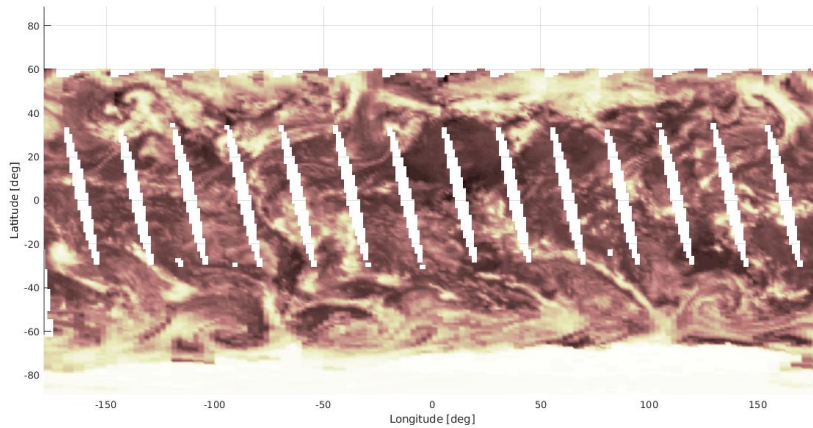
$$E_r = \rho E_{\text{dd}} (1 + S\rho + S^2\rho^2 + \dots + S^n\rho^n + \dots) \quad (4.4)$$

$$= \frac{\rho E_{\text{dd}}}{1 - f\rho}. \quad (4.5)$$

Com o efeito da dispersão e absorção atmosférica, apenas uma fração f da irradiância refletida chega à superfície do satélite. Adicionando a retrodispersão atmosférica do satélite $E_{\text{dd}0}$ é possível descrever o modelo da Equação 4.3.

O satélite que era o responsável por coletar dados para o projeto TOMS gerou diariamente 51840 dados distribuídos nos pontos $\Phi \times \Theta$. Entretanto, para um único dia, o satélite não conseguia fazer a cobertura da Terra completa e, por esse motivo, a Figura 5 está com as medidas incompletas e mostra o resultado obtido pelo satélite no último dia do ano de 2001.

Figura 5 – Dados de refletividade terrestre para o dia 31 de dezembro de 2001 obtido via TOMS

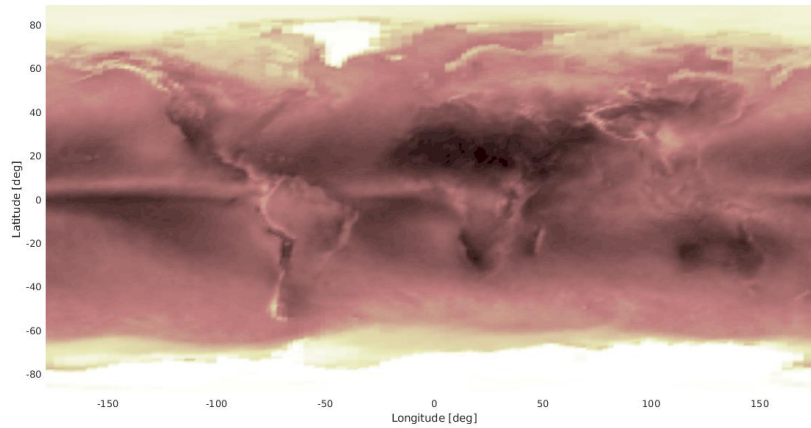


Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por Bhanderi (2022))

A órbita do *Earth Probe Satellite* é configurada de tal forma que o satélite passa por todas as latitudes em quatro meses, assim a refletividade média é calculada e o resultado é

dado pela Figura 6. Nessa perspectiva, a associação das cores no mapa muda em relação a taxa de refletividade, sendo que as regiões mais claras são os locais em que a refletividade é alta e as regiões mais escuras são os locais em que a refletividade é baixa. Nas regiões dos polos da Terra, a refletividade é alta, tal fato ocorre devido a presença das calotas polares e a refletividade em torno da região do Equador é baixa.

Figura 6 – Dados da refletividade terrestre média para o ano de 2001 obtido via TOMS



Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por [Bhanderi \(2022\)](#))

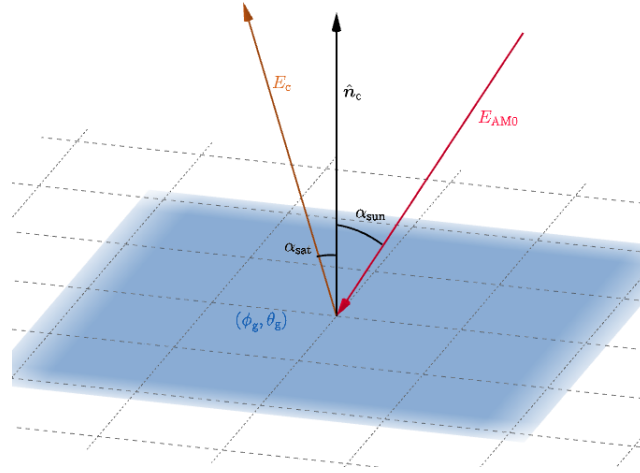
A representação esquemática da incidência solar e fluxo do albedo terrestre pode ser compreendida na Figura 7. O fluxo de fótons oriundos do Sol incidindo sobre a superfície da Terra é dado por E_{AM0} que se choca com um ponto de (ϕ_g, θ_g) , tal que α_c é o ângulo de incidência entre a incidência solar e a normal $\hat{n}_c$. O ângulo de incidência determina a densidade da irradiância solar recebida em um determinado ponto do plano $\mathbf{D}$ que possui uma área $A_c(\phi_g)$. O albedo terrestre é a reflexão da incidência do fluxo solar e é determinada por E_c , tal que α_{sat} determina a densidade deste fluxo na superfície do satélite ([BHANDERI; BAK, 2005](#)).

O fluxo de fótons oriundos do Sol incidindo sobre uma superfície também é conhecido como energia radiante. De acordo com [Borderies e Longaretti \(1990\)](#), o valor assumido para E_{AM0} é de 1367 W/m^2 para uma distância de 1 AU que é a distância da Terra até o Sol.

Medidas mais recentes, segundo [Kopp e Lean \(2011\)](#), o valor da constante varia de 1361 W/m^2 até 1363 W/m^2 e sofre rápidas oscilações que podem atingir até 5 W/m^2 . Essas flutuações da irradiância solar são imprevisíveis e podem ser visualizadas no conjunto de dados que foi desenvolvido por [Fröhlich e Lean \(2022\)](#).

A distância entre a Terra e o Sol muda em relação ao movimento translacional da Terra, entretanto a distância entre a Terra e o satélite é muito pequena em relação a distância Terra-Sol. Dessa forma, como neste trabalho é utilizado a média anual do albedo terrestre, a distância Terra-Sol é assumida como constante e adotaremos o calor

Figura 7 – Diagrama ilustrativo da incidência solar e fluxo do albedo terrestre em uma determinada área do plano



Fonte: Autor

apresentado por [Borderies e Longaretti \(1990\)](#) para o fluxo de fótons oriundos do Sol incidindo sobre a superfície da Terra, ou seja,

$$E_{AM0} = 1367 \text{ W/m}^2. \quad (4.6)$$

Além disso, é importante salientar que o fluxo de energia radiante é alterado pela atmosfera terrestre. Nessa perspectiva, a atmosfera influencia na absorção e no espalhamento, sendo que as nuvens são as principais responsáveis pelo espalhamento da radiação ([ZANARDI, 1993](#)).

A quantidade de energia refletida por uma unidade de área no plano definido por $(\phi_g, \theta_g) \in \mathbf{D}$, depende da área $A_c(\phi_g)$. A área pode ser descrita por ([BHANDERI; BAK, 2005](#))

$$A_c(\phi_g) = \theta_g r_E^2 \times \left(\cos\left(\phi_g - \frac{\Delta\phi_g}{2}\right) - \cos\left(\phi_g + \frac{\Delta\phi_g}{2}\right) \right), \quad (4.7)$$

sendo que r_E é o raio médio da Terra.

A energia radiante em uma determinada área é igual a constante E_{AM0} multiplicada por um ângulo definido por α_{Sun} , do qual este ângulo é formado entre a normal $\hat{n}_c$ e o vetor definido pela distância entre a Terra e o Sol $\hat{r}_{Sun}$. Este ângulo determina a densidade da energia solar, visto que na medida que o ângulo aumenta, a irradiância diminui. O fluxo de energia radiante $P_c(\phi_g, \theta_g)$ em um único ponto de (ϕ_g, θ_g) é dado por ([BHANDERI; BAK, 2005](#))

$$P_c(\phi_g, \theta_g) = E_{AM0} A_c(\phi_g) \left\{ \hat{r}_{Sun}^T \hat{n}_c \right\}_0^\infty, \quad (4.8)$$

tal que $\{\cdot\}_a^b$ é a densidade do ângulo de incidência, tal que o limite inferior é a e o limite superior é b .

Neste trabalho, é definido que os fótons refletidos difusivamente pela superfície obedecem à lei de reflexão de Lambert. É válido ressaltar que a Lei de Lambert pode ser substituída por outras leis de reflexão que podem representar melhor a resposta real da reflexão do material que foi utilizado na superfície do satélite (ZANARDI, 1993). O fluxo de energia radiante refletida $P_r(\phi_g, \theta_g)$ é calculada pela fração $\rho(\phi_g, \theta_g)$ multiplicada pela Equação 4.8

$$P_r(\phi_g, \theta_g) = \rho(\phi_g, \theta_g)P_c(\phi_g, \theta_g), \quad (4.9)$$

tal que $\rho(\phi_g, \theta_g)$ é a reflexão em um determinado ponto.

Para determinar a interferência do albedo terrestre na superfície do satélite, é necessário determinar a irradiância $E_r(\phi_g, \theta_g)$ em uma área do satélite. Da mesma forma, é formado um ângulo entre a normal e o vetor do satélite $\hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}}$, assumindo a lei de Lambert temos que (BHANDERI; BAK, 2005; RYER, 1997)

$$E_r(\phi_g, \theta_g) = \frac{P_r(\phi_g, \theta_g)}{\pi}. \quad (4.10)$$

A intensidade da radiação é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja, para uma distância da Terra até o satélite, temos que

$$E_{\text{sat}}(\phi_g, \theta_g) = \frac{E_r(\phi_g, \theta_g)}{\|\hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}}\|^2}. \quad (4.11)$$

Ademais, o albedo terrestre depende da região da Terra que é iluminada pelo Sol. Nesse contexto, as regiões de descontinuidade do albedo terrestre e do fluxo de energia radiante são regiões em que a Terra e o satélite estão na região de sombra da Terra e que pode ser modelada através da função sombra desenvolvida por Mello (1972). A região visível é relacionada com o cosseno do ângulo α_{sat} . Combinando as Equações 4.10 e 4.11, é obtido o resultado da expressão para o efeito do albedo terrestre $E_r(\phi_g, \theta_g)$ para uma região, assim

$$E_c(\phi_g, \theta_g) = \frac{P_r(\phi_g, \theta_g) \left\{ \hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}}^T \hat{\mathbf{n}}_c \right\}_0^\infty}{\pi \|\hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}}\|^2}. \quad (4.12)$$

O modelo para o albedo terrestre considerando o período em que o satélite e a Terra encontram-se na região de sombra pode ser expresso por:

$$E_c(\phi_g, \theta_g) = \begin{cases} \frac{\rho(\phi_g, \theta_g) E_{\text{AM0}} A_c \hat{\mathbf{r}}_{\text{Sun}}^T \hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \hat{\mathbf{n}}_c}{\pi \|\hat{\mathbf{r}}_{\text{sat}}\|^2} & \text{se } (\phi_g, \theta_g) \in \mathbf{V}_{\text{Sun}} \cap \mathbf{V}_{\text{sat}} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.13)$$

O albedo terrestre total E_a na região do satélite pode ser calculada pela seguinte soma:

$$E_a = \sum_{\mathbf{V}_{\text{Sun}} \cap \mathbf{V}_{\text{sat}}} E_c(\phi_g, \theta_g). \quad (4.14)$$

De tal forma que $E_c(\phi_g, \theta_g)$ são os dados obtidos via TOMS. O modelo do albedo terrestre é importante para a determinação da corrente do sensor solar utilizado neste trabalho e perturba os vetores de observação na determinação de atitude ([BHANDERI; BAK, 2005](#)).

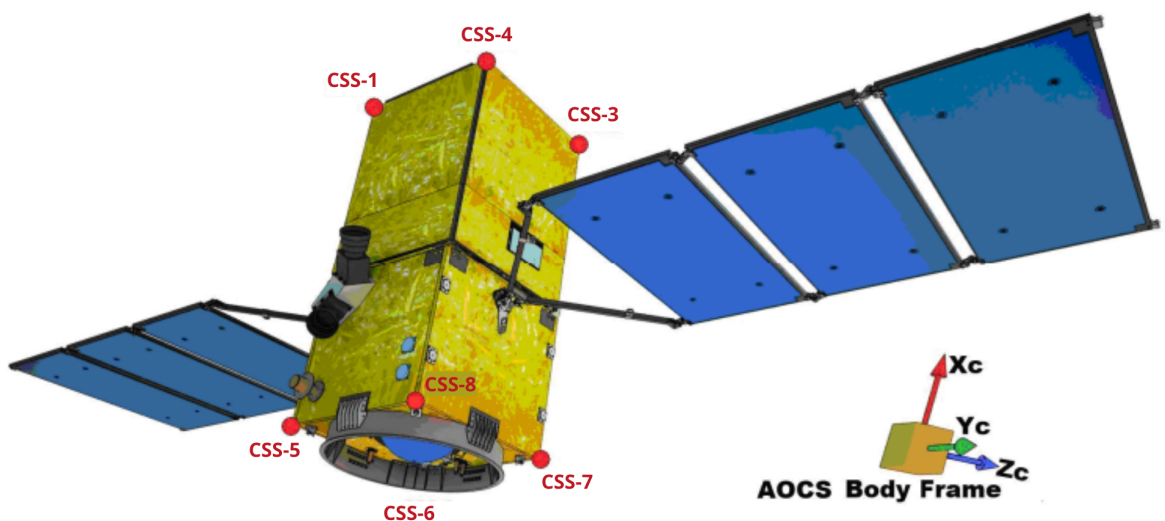
5 Modelo Matemático dos Sensores

A modelagem matemática precisa e confiável dos sensores de atitude presentes em uma missão espacial de sucesso é imprescindível. Neste capítulo, são apresentados os modelos dos Sensores Solares (*Coarse Solar Sensor* - CSS) e modelo do magnetômetro que são uns dos sensores que estão a bordo do satélite Amazonia 1 e que serão utilizados neste trabalho.

5.1 Modelo do Sensor Solar

O sensor solar é utilizado para determinar a posição do Sol. Usualmente, classificam-se os sensores solares em duas classes, o *Coarse Sun Sensor* (CSS) e o *Fine* ou *Digital Sun Sensor* (DSS) (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014; BHANDERI, 2005). No caso do Amazonia 1, existem 8 sensores do tipo CSS localizados nos vértices do corpo do satélite que possibilitam a determinação da posição do Sol de maneira precisa e confiável independentemente da atitude, ou seja, o conjunto de sensores possui um campo de visão de 4π esferorradianos. Estes sensores solares não são caros e podem ser utilizados em pequenos satélites (O'KEEFE; SCHAUB, 2017; WERTZ, 2012). O modelo matemático descrito para o sensor solar considera um pequeno circuito e é baseado na modelagem real dos sensores do Amazonia 1. A Figura 8 representa a distribuição dos oito CSS no Amazonia 1.

Figura 8 – Distribuição dos oito CSS no Amazonia 1



A matriz de saída $\mathbf{H}$ dos CSS no sistema do corpo é dado por:

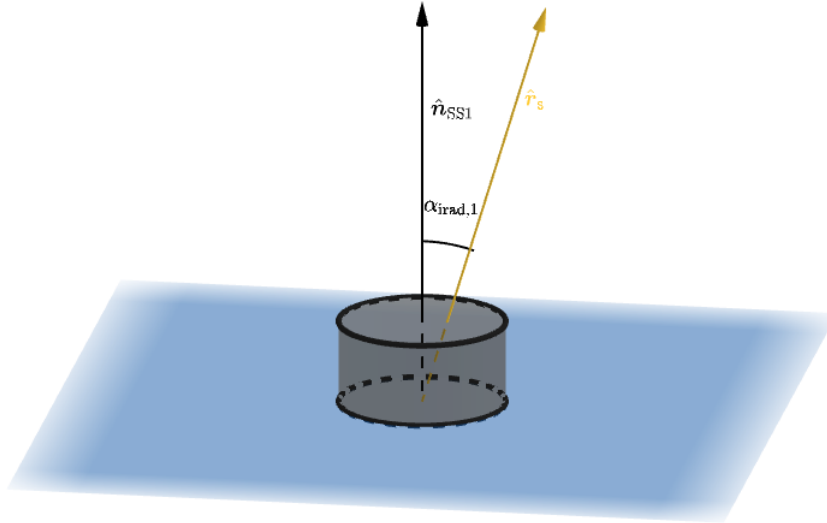
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

O ângulo formado entre a incidência solar e a normal determina o fluxo da densidade de irradiância para cada região da superfície do satélite. A partir do fluxo de energia radiante no sensor solar, é possível definir a eficiência de cada CSS. De acordo com [Bhanderi \(2005\)](#) e [O’Keefe e Schaub \(2017\)](#), a calibração dos sensores solares acontece antes de seu lançamento para o espaço. A medida da corrente para um sensor do Sol ideal depende de uma função do ângulo de incidência, assim

$$i_{\text{meas},k} = i_0 \{\cos(\alpha_{\text{irad},k})\}_0^1. \quad (5.2)$$

O ângulo $\alpha_{\text{irad},k}$ é medido entre o vetor posição do Sol e a normal do CSS, $\hat{\mathbf{n}}_{\text{SS}k}$, como o Amazonia 1 possui oito sensores solares, é necessário calcular os vetores normais para cada vértice.

Figura 9 – Diagrama ilustrativo do ângulo de incidência $\alpha_{\text{irad},i}$ no sensor solar do Amazonia 1



Fonte: Autor

De acordo com [Lopes et al. \(2012\)](#), uma maneira simples de calcular a determinação das correntes excluindo a modelagem matemática do albedo é:

$$i_k = i_0 \cos \alpha_{\text{irad},k} + v_k = i_0 \mathbf{h}_k^T \mathbf{S} + v_k, \quad \forall k \in [1, 8]. \quad (5.3)$$

tal que $\mathbf{S}$ é o versor direção do Sol, $\alpha_{\text{irad},i}$ é o ângulo de incidência entre a normal, i_0 é a corrente quando o ângulo entre a normal e a incidência é zero e é igual a 25 mA, $\mathbf{h}_k$ é o vetor de observação e v_k são os ruídos associados a possíveis erros.

A representação em forma de matrizes pode ser descrita por:

$$\mathbf{Z} = i_0 \mathbf{H}^T \mathbf{S} + \mathbf{V}, \quad (5.4)$$

tal que:

$$\mathbf{Z} \equiv \{\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_8\}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{V} \equiv \{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_8\}. \quad (5.6)$$

Para determinar o vetor solar unitário no sistema orbital, é necessário calcular diferença das correntes dos sensores que estão opostos, ou seja,

$$\Delta \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_4 - i_6 \\ i_8 - i_2 \\ i_5 - i_3 \\ i_1 - i_7 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Multiplicar a Equação 5.7 pela pseudoinversa da matriz $\mathbf{D}$, tal que:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Caso o resultado da norma desta multiplicação resultante for menor do que 5 mA, então o satélite está em eclipse, caso contrário o vetor solar é igual ao vetor solar dividido pela sua norma. Matematicamente, temos que:

$$\mathbf{s}_0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \|\mathbf{D}\Delta \mathbf{i}\| < 5 \text{ mA} \\ \frac{\mathbf{s}_0}{\|\mathbf{s}_0\|} & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.9)$$

Dessa forma, é factível descrever um algoritmo para descrever a estimativa do vetor solar unitário no sistema orbital e que tais resultados são explorados no Capítulo 8.

5.2 Modelo do Magnetômetro

Os magnetômetros são sensores que fornecem a intensidade do campo magnético da Terra e a direção do campo. Os magnetômetros possuem características intrínsecas que são ideais para aplicação aeroespaciais, principalmente, para satélites de órbitas baixas, visto que para satélites com maiores altitudes, o campo magnético é significativamente menos intenso. Nesse contexto, os magnetômetros são relativamente pequenos, leves, confiáveis e baratos (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014; YANG, 2019; SILVA, 2005).

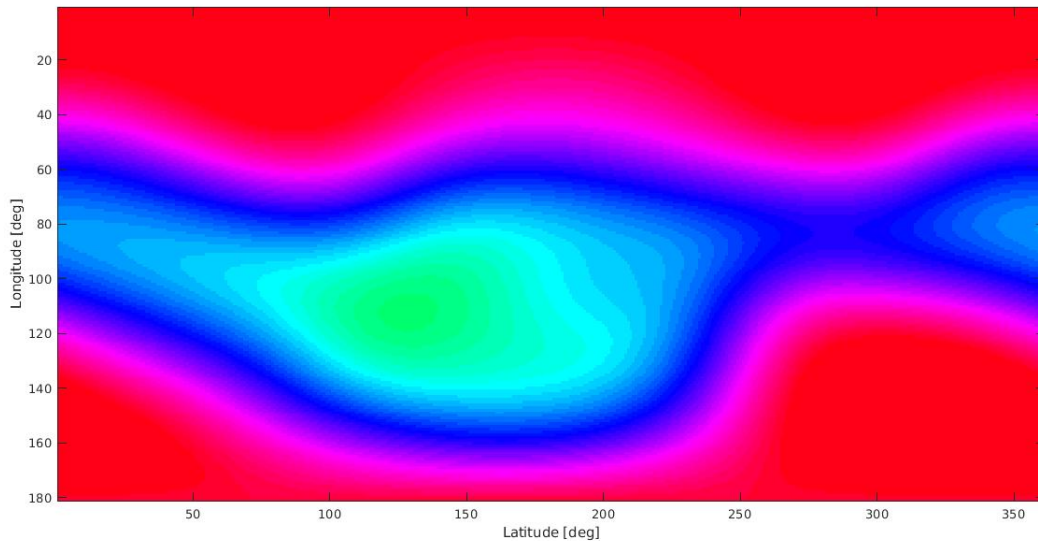
Esses vetores do campo magnético são obtidos a partir do modelo matemático do *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF) que descreve o campo magnético da Terra e sua variação secular. O campo magnético da Terra está sujeito à incertezas. Por exemplo, a falta de precisão do campo geomagnético, da posição do satélite e do campo residual do próprio satélite podem contribuir para gerar mais incertezas (THEBAULT et al., 2015). A partir das coordenadas geocêntricas esféricas polares, é possível definir o modelo do IGRF como:

$$V(r, \theta, \phi, t) = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [g_n^m(t) \cos(m\phi) + h_n^m(t) \sin(m\phi)] P_n^m(\cos \theta), \quad (5.10)$$

o parâmetro $a = 6371,2$ km é o raio de referência magnética e os coeficientes $g_n^m(t)$ e $h_n^m(t)$ são geralmente dados em unidades de nanotesla (nT) e $P_n^m(\cos \theta)$ é a quase-normalização de Schmidt associado às funções de Legendre com grau n e ordem m (WINCH et al., 2005; CAHILL; AMAZEEN, 1963).

Neste trabalho, é usado o modelo do IGRF médio para o ano de 2001, visto que o modelo médio do albedo terrestre também é deste ano. A Figura 10 apresenta o resultado médio do campo magnético da Terra, tal que a associação de cores no mapa muda em relação ao campo magnético e as regiões avermelhadas são locais com campo magnético mais alto do que quando comparados com as regiões azuladas. O resultado obtido foi baseado no algoritmo PROPAT desenvolvido por Carrara (2015).

Figura 10 – Campo magnético da Terra para o ano de 2001 obtido via IGRF



Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por Carrara (2015))

No satélite Amazonia 1 são utilizados dois magnetômetros que foram desenvolvidos pela indústria argentina (CARLEIAL, 2014). A medida do campo magnético pode apresentar variações pela proximidade a materiais ferromagnéticos e pelo campo magnético residual, presentes no próprio satélite (SILVA, 2005). Nesse contexto, usualmente os

magnetômetros são separados em duas categorias: o magnetômetro quântico e o magnetômetro induzido. Ambos os magnetômetros presentes no Amazonia 1 são magnetômetros induzidos.

O magnetômetro induzido é baseado no efeito Hall e consiste em três bobinas de haste de alta permeabilidade que são mutualmente perpendiculares. Dessa forma, aplica-se uma corrente alternada nas bobinas com o intuito de magnetizar as hastes em uma direção e depois aplica uma corrente com sentido contrário, a orientação das hastes em relação ao campo magnético da Terra são determinadas através da orientação do veículo espacial (FABRI, 1997; HATCHER, 1967).

6 Representações de Atitude

Em satélites artificiais, existem diferentes coordenadas de atitude que podem ser representadas de maneira com que se evite singularidades e descrições geométricas ambíguas. Nessa perspectiva, a determinação da posição e da velocidade do corpo em órbita deve ser muito bem descrita, pois auxilia a supervisão e o controle do satélite. Caso a atitude do satélite seja determinada de maneira errônea, uma série de propagação de erros acontece e o satélite pode deixar de funcionar (YANG, 2019). Grandes cientistas como Euler, Jacobi, Hamilton, Cayley, Klein, Rodrigues e Gibbs debruçaram-se no tema de descrição de coordenadas de atitude em uma busca para a adequação de um sistema matematicamente simples e que evite singularidades no seu desenvolvimento (SCHAUB; JUNKINS, 2003).

Ademais, a descrição das coordenadas de atitude deve ser facilmente inserida em métodos computacionais. Assim, é imprescindível que a descrição de atitude seja realizada de maneira a facilitar a predição e o controle com algoritmos com baixo processamento computacional (WERTZ, 2012). Neste capítulo, é apresentado dois parâmetros de atitude que são utilizados neste trabalho.

6.1 Atitude Representada por Matriz de Cossenos Diretores

A atitude representada pela Matriz de Cossenos Diretores (*Directional Cosine Matrix* - DCM) ou, simplesmente, matriz de atitude, descreve matematicamente a atitude de um satélite a partir de uma matriz. A Figura 11 representa dois sistemas definidos em $\mathbb{R}^3$, tal que o sistema de coordenadas $\mathcal{B}$ representa uma referência no corpo rígido do satélite e o sistema de coordenadas $\mathcal{N}$ representa um sistema inercial qualquer. Os versores que representam sua base são definidos por $\{\hat{\mathbf{b}}\}$ e $\{\hat{\mathbf{n}}\}$, respectivamente. A partir destes dois sistemas de referência, são formados ângulos α_{ij} entre os versores com $i, j = 1, 2, 3$ que formam os cossenos diretores (SCHAUB; JUNKINS, 2003).

É possível descrever a base ortonormal do versor $\{\hat{\mathbf{b}}\}$ em termos da base de $\{\hat{\mathbf{n}}\}$ como

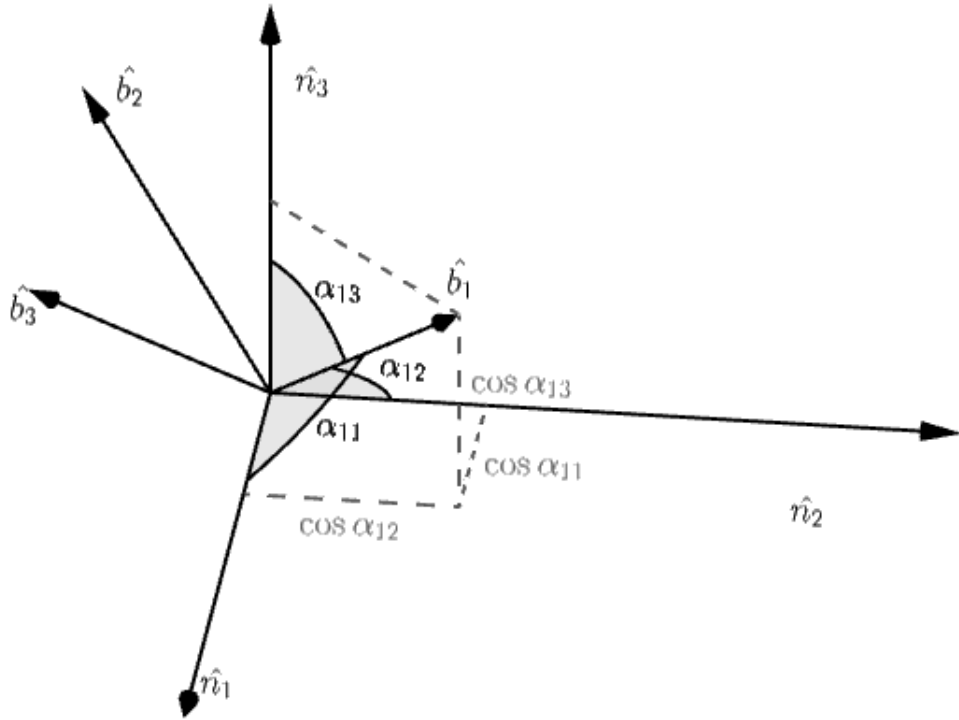
$$\{\hat{\mathbf{b}}\} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}\} = \mathbf{A} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}\}, \quad (6.1)$$

tal que a matriz $\mathbf{A}$ é conhecida como a Matriz de Cossenos Diretores ou Matriz de Atitude.

O versor $\{\hat{\mathbf{n}}\}$ pode ser projetado sobre o versor $\{\hat{\mathbf{b}}\}$, assim

$$\{\hat{\mathbf{n}}\} = \mathbf{A}^T \{\hat{\mathbf{b}}\}. \quad (6.2)$$

Figura 11 – Diagrama ilustrativo dos cossenos diretores formados a partir dos sistemas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$



Fonte: Autor

Além disso, a matriz de cossenos diretores possuem algumas propriedades matemáticas interessantes. Substituindo a Equação 6.2 na Equação 6.1 temos que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (6.3)$$

Essa propriedade garante que a matriz de cossenos diretores é ortogonal. Além disso, a inversa de $\mathbf{A}$ é a transposta de $\mathbf{A}$, ou seja (SCHAUB; JUNKINS, 2003)

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \quad (6.4)$$

A determinante da Equação 6.3 é 1, ou seja,

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{I}_{3 \times 3}) = 1. \quad (6.5)$$

A partir da linearidade do operador determinante, podemos escrever a Equação 6.5 como:

$$\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^T) = 1. \quad (6.6)$$

Ou ainda,

$$\det(\mathbf{A})^2 = 1 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = \pm 1. \quad (6.7)$$

Após descrever algumas propriedades importantes da matriz de cossenos diretores e descrever a base para análise de um corpo rígido de um satélite, na próxima seção é retratado a parametrização dos quatérnions para descrever o movimento rotacional do satélite. A descrição do DCM é necessária, pois é com a representação da matriz de cossenos diretores que são feitas as conversões que serão abordadas posteriormente. Ademais, é válido ressaltar que todos os cálculos dos parâmetros de atitude são baseados na matriz de cossenos diretores.

6.2 Atitude Representada por Quatérnions

A representação da atitude por quatérnions (ou parâmetros de Euler) é uma das maneiras de descrever matematicamente a atitude de um satélite e é amplamente utilizada no setor aeroespacial. Os quatérnions possuem vantagens quando comparadas com outras parametrizações, porque não possuem singularidades. Os quatérnions apresentam uma ambiguidade, $\mathbf{q}$ e $-\mathbf{q}$ apresentam a mesma rotação. Nesse contexto, é factível remover essa ambiguidade se forçar a parte real do quatérnion ser positiva, entretanto isso trás problemas de continuidade.

Os quatérnions podem ser representados através de um vetor de rotação principal. O vetor de rotação principal é definido pelo Teorema de Rotação de Euler que é descrito por (SCHAUB; JUNKINS, 2003):

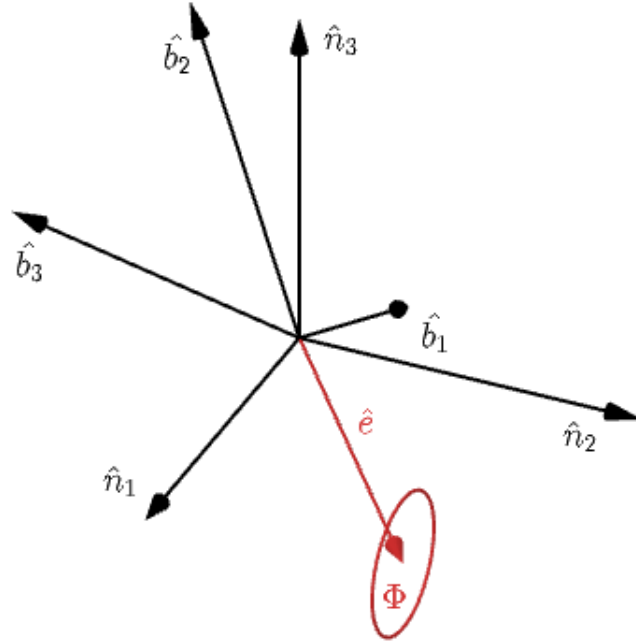
Teorema 6.2.1 (Rotação principal de Euler) *Um corpo rígido ou uma coordenada de referência pode ser definida de maneira que a sua orientação final seja representada por um ângulo Φ sobre um vetor de rotação principal $\hat{\mathbf{e}}$.*

Dessa forma, é possível elucidar o Teorema 6.2.1 pela Figura 12, tal que o vetor de rotação principal $\hat{\mathbf{e}}$ e o ângulo Φ são definidos em relação ao sistema do corpo $\mathcal{B}$ e ao do sistema inercial $\mathcal{N}$.

Os quatérnions podem ser descritos através do vetor de rotação principal. Neste trabalho, o escalar é definido no último termo do vetor, ou seja, q_4 e a parcela vetorial é dada por $\vec{q}$.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \vec{q} & q_4 \end{pmatrix}^T, \quad (6.8)$$

Figura 12 – Diagrama ilustrativo do vetor de rotação principal $\hat{e}$ com ângulo Φ e sistemas de coordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$



Fonte: Autor

tal que os quatérnions são descritos pelo vetor de rotação principal através da relação:

$$q_1 = e_1 \sin(\Phi/2), \quad (6.9a)$$

$$q_2 = e_2 \sin(\Phi/2), \quad (6.9b)$$

$$q_3 = e_3 \sin(\Phi/2), \quad (6.9c)$$

$$q_4 = \cos(\Phi/2). \quad (6.9d)$$

Sendo que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$, além de que os quatérnions necessitam satisfazer a condição da norma unitária, ou seja

$$\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1. \quad (6.10)$$

A matriz de atitude através dos quatérnions pode ser descrita como (SCHAUB; JUNKINS, 2003):

$$\mathbf{A} = (|q_4|^2 - \|\vec{q}\|^2) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\vec{q}\vec{q}^T + 2q_4[[\vec{q}]], \quad (6.11)$$

tal que $[[\vec{q}]]$ é uma matriz antissimétrica que é descrita como (SHUSTER et al., 1993):

$$[[\vec{q}]] = \begin{pmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Desse modo, os elementos da matriz de atitude em termos das componentes dos quatérnions são descritos por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

Sendo $\mathbf{A}$ a matriz de cossenos diretores e a partir dos elementos dessa matriz, é possível descrever os quatérnions, dados pelas relações (SCHAUB; JUNKINS, 2003):

$$q_1 = \frac{A_{23} - A_{32}}{4q_4}, \quad (6.14a)$$

$$q_2 = \frac{A_{31} - A_{13}}{4q_4}, \quad (6.14b)$$

$$q_3 = \frac{A_{12} - A_{21}}{4q_4}, \quad (6.14c)$$

$$q_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{A_{11} + A_{22} + A_{33} + 1}. \quad (6.14d)$$

Quando $q_4 \rightarrow 0$, existe uma singularidade correspondente ao ângulo de 180° do vetor de rotação principal (SHUSTER et al., 1993). Existem algumas formas de descrever computacionalmente o método para o cálculo dos quatérnions para contornar as singularidades que são causadas pela conversão das matrizes de atitude que foi desenvolvido por Shepperd (1978), e que não serão abordados neste trabalho.

Uma característica importante da composição da rotação com os quatérnions é que possível combinar as rotações. Considerando dois sistemas S e S' que são relacionados através de duas rotações consecutivas. Considerando o quatérnion da primeira rotação $\mathbf{q}$ e o quatérnion da segunda rotação $\mathbf{q}'$, podemos definir:

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q}' \otimes \mathbf{q}, \quad (6.15)$$

tal que as matrizes de atitude dos dois sistemas são relacionadas por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}'') = \mathbf{A}(\mathbf{q}')\mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (6.16)$$

Para calcular $\mathbf{A}(\mathbf{q}'')$ é necessário calcular previamente as matrizes de atitude relacionados a $\mathbf{A}(\mathbf{q}')$ e $\mathbf{A}(\mathbf{q})$. Dessa forma, é possível calcular a matriz de atitude $\mathbf{A}(\mathbf{q}'')$ através da Equação 6.16 e calcular os quatérnions através da Equação 6.14. Existe uma outra maneira de descrever os quatérnions que é descrito a seguir (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011):

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q}' \otimes \mathbf{q} = \{\mathbf{q}'\}\mathbf{q} = \{\mathbf{q}\}\mathbf{q}', \quad (6.17)$$

com

$$\{\mathbf{q}'\} = \begin{pmatrix} q'_4 & q'_3 & -q'_2 & q'_1 \\ -q'_3 & q'_4 & q'_1 & q'_2 \\ q'_2 & -q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

6.2.1 Dinâmica de Atitude em Quatérnions

As equações cinemáticas dos quatérnions são obtidas a partir da derivação da Equação 6.14 e é possível expressar a equação cinemática como (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011):

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

tal que ω_x , ω_y , ω_z são as componentes da taxa de variação da velocidade de angular do satélite.

As equações diferenciais do estado para a atitude são representadas, respectivamente, por (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011):

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_\omega \mathbf{q}, \quad (6.21)$$

de tal forma que $\mathbf{\Omega}_\omega$ é uma matriz antissimétrica transposta 4×4 dada por (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011):

$$\mathbf{\Omega}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Dessa forma, uma solução analítica é obtida com a hipótese de os dados do giro serem amostrados a uma taxa fixa. Assim, teremos que

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_q(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) \mathbf{q}(t_k), \quad (6.23)$$

tal que Δt é o intervalo de amostra; $\mathbf{q}(t_k)$ é o quatérnion de atitude no tempo t_k ; $\mathbf{q}(t_{k+1})$ é o quatérnion de atitude propagado no tempo t_{k+1} ; e $\mathbf{\Phi}_q$ é a matriz de transição transportando

o sistema do tempo t_k a t_{k+1} , dada por (SILVA et al., 2019):

$$\Phi_q(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) = \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|\Delta t}{2}\right)\mathbf{I}_{4\times 4} + \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\sin\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|\Delta t}{2}\right)\boldsymbol{\Omega}_\omega. \quad (6.24)$$

Assim, é possível descrever a dinâmica de atitude utilizada neste trabalho.

7 Métodos de Determinação de Atitude

A determinação de atitude é de essencial para que o satélite cumpra a sua missão. Nessa perspectiva, a determinação de atitude é o processo de obter os parâmetros de atitude a partir das medidas de, no mínimo, dois tipos de grandezas físicas. As grandezas físicas podem ser o campo magnético da Terra, o vetor solar, estrelas, entre outras (WERTZ, 2012; ÇELIK; HAJIYEV, 2013).

O processo de determinação de atitude é, usualmente, dividido em duas categorias: estático e estocástico. A primeira categoria é relacionada para medidas que são feitas no mesmo período ou em intervalos de tempo pequenos, tal que o movimento do satélite entre as medidas pode ser ignorada ou compensada pelo controle de atitude. A segunda categoria é relacionada com o termo “estimação” que é restrito para determinação de atitude de maneira estocástica, seja ela feita com um filtro de Kalman ou um método de máxima verossimilhança (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014; SHUSTER, 1989).

Neste capítulo, é discutido e apresentado as principais técnicas de determinação de atitude que podem ser amplamente aplicadas para a solução de problemas de atitude e órbita de satélites artificiais que são utilizadas neste trabalho.

7.1 Métodos Estáticos para Determinação de Atitude

O método estático para determinação de atitude é válida para descrever a atitude para medidas que são feitas no mesmo período ou em intervalos de tempo pequenos, tal que o movimento do satélite entre as medidas pode ser ignorada ou compensada pelo controle de atitude e, por isso, também é conhecida como algoritmo de ponto único. A maioria dos algoritmos que utilizam métodos estáticos para a determinação de atitude são baseados no problema que foi desenvolvido por Wahba (1965). O problema de Wahba consiste em encontrar uma matriz de atitude $\mathbf{A}$ com determinante +1 que minimiza a função de custo

$$L(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j \|\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}} - \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}}\|^2, \quad (7.1)$$

tal que w_j é o peso do j -ésimo vetor de observação, $\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}}$ é o vetor na referência inercial e $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz de atitude representada pela rotação do sistema inercial até o sistema do corpo (MARKLEY; MORTARI, 2000).

Alguns métodos de determinação de atitude utilizam exatamente duas medidas físicas para determinar o movimento rotacional do satélite. Geralmente, estes vetores são tipicamente o campo magnético e a estimação do vetor solar a partir dos sensores solares.

Um destes métodos que são amplamente utilizados nos satélites é o TRIAD.

Além disso, uma das soluções para minimizar a Equação 7.1 é o Q-Method que calcula diretamente a atitude ótima do quatérnion minimizando o problema de Wahba (MARKLEY; MORTARI, 1999). O Q-Method foi desenvolvido por Paul Davenport em 1968 e foi o primeiro a solucionar o problema de Wahba para a determinação de atitude de um satélite (LERNER, 1978). Uma série de outros métodos podem ser derivadas do Q-Method, por exemplo, o método QUEST (*QUaternion ESTimator*), tal que o método QUEST fornece estimativas ótimas locais da atitude através do critério de mínimos quadrados sem necessitar da modelagem matemática do sistema dinâmico (SHUSTER; OH, 1981; VAROTTO, 1989).

Neste trabalho, utiliza-se o TRIAD, Q-Method, QUEST e o método desenvolvido por Yang e Zhou (2013) para a determinação de atitude do satélite e uma breve descrição matemática para cada um destes métodos é dada a seguir.

7.1.1 TRIAD

O nome “TRIAD” pode ser considerado pela palavra “triad” ou como um acrônimo de *TRIaxial Attitude Determination*. A matriz de atitude pode ser determinada pela rotação de dois vetores com base no sistema inercial e no sistema do corpo, assim

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}} = \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}}, \text{ para } j = 1, 2. \quad (7.2)$$

Geralmente isso não é possível, entretanto a Equação 7.2 implica que

$$\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{B}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{B}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}}) \cdot (\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{N}}) = \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}T} (\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}})^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{N}} = \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{N}}. \quad (7.3)$$

Essa igualdade é válida para medidas que não possuem erros de origem aleatória, mas não é verdadeira quando há medida de erros. Dessa forma, pode se determinar triads com base no sistema inercial e no sistema do corpo de tal forma que

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (7.4)$$

ou seja,

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (7.5)$$

De tal forma que a triad $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ é desenvolvida a partir do referencial inercial e a triad $\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{pmatrix}$ desenvolvida a partir do referencial do corpo. Dessa forma,

$$\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}}, \quad \mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{N}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}} \times \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{N}}}{\|\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}} \times \hat{\mathbf{v}}_2^{\mathcal{N}}\|}, \quad \mathbf{v}_3 = \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{N}}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{w}}_1^{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{w}_2 = \hat{\mathbf{w}}_{\times}^{\mathcal{B}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathcal{B}} \times \hat{\mathbf{w}}_2^{\mathcal{B}}}{\|\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathcal{B}} \times \hat{\mathbf{w}}_2^{\mathcal{B}}\|}, \quad \mathbf{w}_3 = \hat{\mathbf{w}}_1^{\mathcal{B}} \times \hat{\mathbf{w}}_{\times}^{\mathcal{B}}. \quad (7.7)$$

Assim, a matriz de atitude determinado pelo TRIAD é obtida pela Equação 7.4 é dada por:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} = \hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{B}}(\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}})^T + (\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{B}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{B}})(\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathcal{N}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{N}})^T + \hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{B}}(\hat{\mathbf{v}}_{\times}^{\mathcal{N}})^T. \quad (7.8)$$

Observa-se que essa solução obedece a Equação 7.2 e com algumas manipulações de produtos internos e vetoriais é possível notar que a Equação 7.3 também é satisfeita (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014).

7.1.2 Q-Method

Para simplificar o problema de Wahba é conveniente expandir a norma da Equação 7.1 (BHANDERI; BAK, 2005)

$$L(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j \left((\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}})^T \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}} + (\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}})^T (\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}})^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}} - 2(\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}})^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}} \right), \quad (7.9)$$

sendo que $(\hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}})^T \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}}$ é constante e, a partir da Equação 6.3, $(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}})^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz identidade. Dessa forma, é factível escrever a função custo como

$$L(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}) = - \sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \mathbf{s}_j + k, \quad (7.10)$$

tal que k são os termos constantes. Os vetores $\mathbf{t}_j$ e $\mathbf{s}_j$ são definidos por

$$\mathbf{t}_j = \sqrt{w_j} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{B}}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{s}_j = \sqrt{w_j} \hat{\mathbf{v}}_j^{\mathcal{N}}. \quad (7.12)$$

O custo da função é mínimo, quando o ganho da função

$$g(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \mathbf{s}_j = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} \mathbf{S}), \quad (7.13)$$

é máximo. As matrizes $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$ são definidas por:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \cdots & \mathbf{t}_n \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_n \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

e $\text{tr}(\cdot)$ é o traço da matriz. Para maximizar $g(\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}})$ é conveniente definir matriz de atitude em relação aos quatérnions. De acordo com a Equação 6.11 a matriz de atitude em relação aos quatérnions é dada por:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{B}} = (|q_4|^2 - \|\vec{q}\|^2) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\vec{q}\vec{q}^T + 2q_4[[\vec{q}]]. \quad (7.16)$$

Substituindo a Equação 7.16 na Equação 7.13, temos que o ganho da função custo em relação aos quatérnions é dado por (BHANDERI; BAK, 2005)

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (7.17)$$

do qual $\mathbf{C}$ é a matriz definida por:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} - \sigma \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & \sigma \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Além disso, os valores dos elementos da matriz $\mathbf{C}$ é dado por

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}^T + \mathbf{B}, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} B_{2,3} - B_{3,2} \\ B_{3,1} - B_{1,3} \\ B_{1,2} - B_{2,1} \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\sigma = \text{tr}(\mathbf{B}), \quad (7.21)$$

tal que

$$\mathbf{B} = -\mathbf{T}[[\vec{q}]]^T. \quad (7.22)$$

Desse modo, o problema de determinação de atitude ótima reduz-se a encontrar o quatérnion que maximiza a Equação 7.17. Introduzindo um multiplicador de Lagrange na condição da norma unitária dos quatérnions, $\mathbf{q}\mathbf{q}^T$ (YANG, 2019; BHANDERI; BAK, 2005). Uma nova função $g'(\mathbf{q})$ é definida

$$g'(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} - \xi \mathbf{q}^T \mathbf{q}, \quad (7.23)$$

tal que ξ é o multiplicador de Lagrange. A função ganho $g'(\mathbf{q})$ é maximizada sem restrições e ξ é escolhido de tal forma que satisfaz a norma unitária do quatérnion. Calculando-se a derivada da Equação 7.23 com respeito a $\mathbf{q}$ e considerando o resultado igual a zero, a função do autovetor é obtida (SHUSTER; OH, 1981; CRASSIDIS; JUNKINS, 2004)

$$\mathbf{C} \mathbf{q} = \xi \mathbf{q}. \quad (7.24)$$

O quatérnion ótimo que determina a matriz de atitude ótima, de acordo com a Equação 7.16, é um autovetor de $\mathbf{C}$. Substituindo a Equação 7.24 na Equação 7.17 temos que

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \xi \mathbf{q} = \xi, \quad (7.25)$$

portanto $g(\mathbf{q})$ é maximizado se o quatérnion ótimo é o autovetor de $\mathbf{C}$ que está associado ao maior autovalor.

7.1.3 QUEST

O método QUEST (*QUaternion ESTimator*) também é um algoritmo para solucionar o problema de Wahba, tal que o método QUEST fornece estimativas ótimas locais da atitude através do critério de mínimos quadrados sem necessitar da modelagem matemática do sistema dinâmico (SHUSTER; OH, 1981; VAROTTO, 1989).

É possível definir a expressão definida no Q-Method por (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014):

$$\mathbf{0}_{4 \times 4} = \mathbf{H}(\xi_{\max})\mathbf{q}, \quad (7.26)$$

tal que:

$$\mathbf{H}(\xi) \equiv \xi \mathbf{I}_{4 \times 4} - \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} (\xi + \text{tr} \mathbf{B}) \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}^T & \xi - \text{tr} \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

e

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{B} + \mathbf{B}^T. \quad (7.28)$$

A Equação 7.26 é equivalente a essas duas equações a seguir:

$$(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U})\mathbf{q}_{1:3} = q_4 \mathbf{c}, \quad (7.29)$$

$$(\xi_{\max} - \text{tr} \mathbf{B})q_4 - \mathbf{c}^T \mathbf{q}_{1:3} = 0, \quad (7.30)$$

tal que

$$\rho \equiv \xi_{\max} + \text{tr} \mathbf{B}. \quad (7.31)$$

Se é possível determinar o $\xi_{\max}$ e através da manipulação da Equação 7.29, temos que o quatérnion ótimo é dado por (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014)

$$\mathbf{q} = \alpha \begin{pmatrix} \text{adj}(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U})\mathbf{c} \\ \det(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U}) \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

sendo que α é determinado pela normalização do quatérnion. Substituindo a Equação 7.32 na Equação 7.30, é possível determinar uma equação que determina o autovalor máximo

$$(\xi_{\max} - \text{tr} \mathbf{B}) \det(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U}) - \mathbf{c}^T \text{adj}(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U})\mathbf{c} = 0 \quad (7.33)$$

e

$$\det(\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{U}) = \rho^3 - \rho^2 \text{tr} \mathbf{U} + \kappa \rho - \det \mathbf{U}, \quad (7.34)$$

sendo que

$$\kappa \equiv \text{tr}(\text{adj} \mathbf{U}). \quad (7.35)$$

A expressão para o adjunto é dada através do teorema desenvolvido por Cayley-Hamilton que garante que uma matriz obedece a sua própria equação característica, para a matriz $\mathbf{U}$, temos que (HORN; JOHNSON, 2012):

$$\mathbf{U}^3 - \mathbf{U}^2 \text{tr} \mathbf{U} + \mathbf{U} \text{tr}(\text{adj} \mathbf{U}) - \mathbf{I}_{3 \times 3} \det \mathbf{U} = \mathbf{0}_{3 \times 3}. \quad (7.36)$$

Dessa forma, multiplicando a equação por $\text{adj} \mathbf{U}$ e manipulando as expressões, é possível definir (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014):

$$\text{adj} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 - \mathbf{U} \text{tr} \mathbf{U} + \kappa \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (7.37)$$

Com essas substituições na Equação 7.33, é possível definir uma equação quártica para ξ que descreve o método QUEST (MARKLEY; MORTARI, 2000; MARKLEY; CRASSIDIS, 2014):

$$0 = \psi_{\text{QUEST}}(\xi) \equiv [\xi^2 - (\text{tr} \mathbf{U})^2 + \kappa][\xi^2 - (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \|\mathbf{c}\|^2] - (\xi - \text{tr} \mathbf{B})(\mathbf{c}^T \mathbf{U} \mathbf{c} + \det \mathbf{U}) - \mathbf{c}^T \mathbf{U}^2 \mathbf{c} = \prod_{i=1}^4 (\xi - \xi_i). \quad (7.38)$$

7.1.4 Solução Analítica para o Problema de Wahba descrita por Yang e Zhou (2013)

A solução analítica que foi desenvolvida por Yang e Zhou (2013) para solucionar o problema de Wahba é proposto por Shmakov (2011) que desenvolve um método para solucionar uma equação quártica.

A equação característica para a Equação 7.18 é dado por:

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (7.39)$$

sendo que $a = 0$, $b = -2\text{tr}[\mathbf{B}]^2 + \text{tr}[\text{adj}(\mathbf{U})] - \mathbf{c}^T \mathbf{c}$, $\mathbf{U} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T$, $\text{adj}(\mathbf{U})$ (a matriz adjunta de $\mathbf{U}$), $c = -\text{tr}[\text{adj}(\mathbf{C})]$ e $d = \det(\mathbf{C})$ são os parâmetros da equação característica. Recentemente, com a solução desenvolvida por Shmakov (2011) é possível desenvolver um método para encontrar as raízes deste polinômio.

Primeiramente, a Equação 7.39 pode ser fatorada por um produto de dois polinômios quadráticos como (YANG; ZHOU, 2013)

$$(x^2 + g_1x + h_1)(x^2 + g_2x + h_2) = x^4 + (g_1 + g_2)x^3 + (g_1g_2 + h_1 + h_2)x^2 + (g_1h_2 + g_2h_1)x + h_1h_2 = 0. \quad (7.40)$$

Além disso, g_1 , g_2 , h_1 e h_2 são soluções para as duas equações quadráticas e são definidas por

$$g^2 - ag + \frac{2}{3}b - y = 0, \quad (7.41a)$$

$$h^2 - \left(y + \frac{b}{3}\right)h + d = 0, \quad (7.41b)$$

sendo que y são as raízes reais do polinômio cúbico abaixo (YANG; ZHOU, 2013):

$$y^3 + py + q = y^3 + \left(ac - \frac{b^2}{3} - 4d\right)y + \left(\frac{abc}{3} - a^2d - \frac{2}{27}b^3 - c^2 + \frac{8}{3}bd\right) = 0. \quad (7.42)$$

As raízes da equação cúbica pode ser obtida através da fórmula de Cardano (POLYANIN; MANZHIROV, 2006):

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (7.43a)$$

$$y_2 = \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (7.43b)$$

$$y_3 = \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (7.43c)$$

tal que $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $\omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. A Equação 7.42 possui uma solução real ou três soluções reais, se o discriminante

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0, \quad (7.44)$$

portanto a Equação 7.42 tem uma solução real dada pela Equação 7.43a e um duas raízes complexas conjugadas dadas pelas Equações 7.43b e 7.43c. Se $\Delta = 0$, então a Equação 7.42 possui três soluções. Se $\Delta < 0$, então a Equação 7.42 possui três soluções reais distintas. Nesse caso, as soluções são dadas de uma forma diferente. Considerando $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)$, então as três soluções reais são dadas por (YANG; ZHOU, 2013):

$$y_1 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos(\theta), \quad (7.45a)$$

$$y_2 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (7.45b)$$

$$y_3 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right). \quad (7.45c)$$

Dada a solução real de y , com as Equações 7.41 e 7.45a, temos que (YANG; ZHOU, 2013):

$$g_{1,2} = \pm \sqrt{y - \frac{2}{3}b}, \quad (7.46a)$$

$$h_{1,2} = \frac{y + \frac{b}{3} \pm \sqrt{(y + b/3)^2 - 4d}}{2}. \quad (7.46b)$$

Com a Equação 7.40, é válido ressaltar as seguintes relações:

$$(g_1 + g_2) = a, \quad (7.47a)$$

$$g_1 g_2 + h_1 + h_2 = b, \quad (7.47b)$$

$$g_1 h_2 + g_2 h_1 = c, \quad (7.47c)$$

$$h_1 h_2 = d. \quad (7.47d)$$

tal que as Equações 7.47a, 7.47b e 7.47d não dependem das seleções de g_1 , g_2 , h_1 e h_2 da Equação 7.46, mas a Equação 7.47c depende das seleções de g_1 , g_2 , h_1 e h_2 . Em Yang e Zhou (2013) alguns algebrismos são realizados para ressaltar as relações estabelecidas

pelas Equações 7.46 e 7.47. Finalmente, as raízes do polinômio quártico dado pela Equação 7.39 são dadas por (YANG; ZHOU, 2013):

$$x_{1,2} = \frac{-g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 4h_1}}{2}, \quad (7.48a)$$

$$x_{3,4} = \frac{-g_2 \pm \sqrt{g_2^2 - 4h_2}}{2}. \quad (7.48b)$$

Dessa forma, descreve-se a solução analítica do problema de Wahba proposta por Yang e Zhou (2013) que mostra-se mais efetiva do que alguns métodos de determinação de atitude.

8 Resultados

Neste capítulo, são apresentados os valores simulados de órbita e de atitude através do algoritmo PROPAT desenvolvido por Carrara (2015) em MATLAB. A simulação dos dados é baseada nas características orbitais do Amazonia 1. Ademais, é apresentado o fluxo de corrente solar no Amazonia 1 em cada um dos seus 8 sensores solares e a interferência do albedo terrestre em cada um dos sensores. Determinar a atitude com base no TRIAD, Q-Method, QUEST e o método desenvolvido por Yang e Zhou (2013) para realizar uma análise comparativa com os resultados obtidos e determinar a eficiência destes métodos perante a interferência do albedo terrestre em cada instante da órbita do Amazonia 1.

8.1 Condições simuladas

Nesta seção, é feita uma simulação de atitude e de órbita do satélite Amazonia 1 considerando o período de três órbitas. Nesse contexto, como o período orbital nominal do Amazonia 1 é exatamente 100 minutos, a simulação total tem o equivalente à 18.000 segundos.

O satélite Amazonia 1 é um satélite de baixa órbita com altitude aproximada de 750 km que opera em uma órbita sol síncrona congelada, com horário de passagem às 10:30 da manhã na descendente, ou seja, quando o satélite cruza o Equador terrestre do Norte para o Sul. A Tabela 1 apresenta os elementos keplerianos de referência do satélite Amazonia 1 que foram utilizados inicialmente na simulação e a Tabela 2 apresenta o quatérnion e a velocidade angular que foram utilizados inicialmente na simulação. As condições iniciais são estabelecidas para o dia 19/06/2021 às 11:00:00.

Tabela 1 – Elementos keplerianos de referência do Amazonia 1

Variável	Valor
Semieixo maior (a)	7136,6354 km
Excentricidade (e)	0,001111
Inclinação (I)	98,405°
Longitude do nodo ascendente (Ω)	245,3889°
Argumento do perigeu (ω)	90,0000°
Anomalia verdadeira (f)	320,0000°

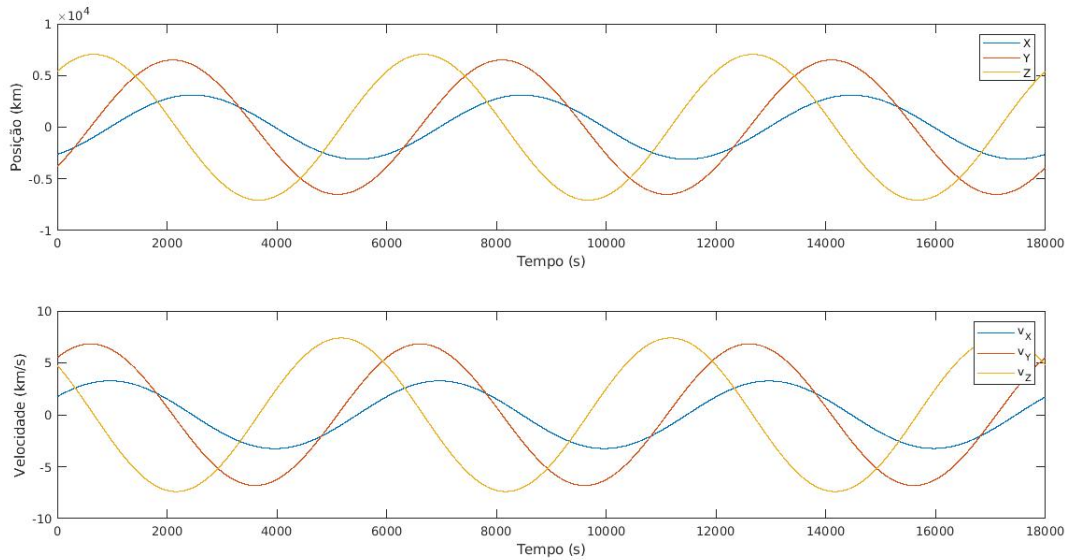
A Figura 13 apresenta os dados simulados da posição e velocidade do satélite no sistema inercial (ECI) para o período orbital de três órbitas do satélite Amazonia 1 com todas as suas características intrínsecas.

A partir dos dados obtidos no ECI, é possível fazer a mudança de coordenadas para

Tabela 2 – Condições iniciais de referência

Variável	Valor
Quatérnion ($\mathbf{q}_0$)	$(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$
Velocidade angular (ω_0)	$(0 \ 0 \ 0,001)^T$ rad/s

Figura 13 – Simulação das componentes de posição e velocidade do satélite para três órbitas do Amazonia 1 no sistema inercial



Fonte: Autor

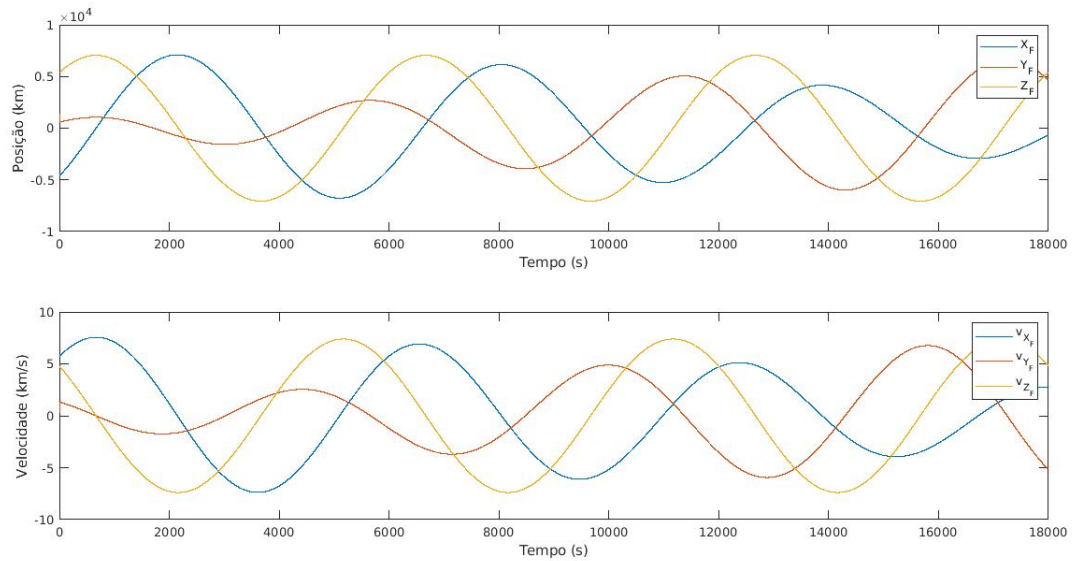
o sistema fixo da Terra. A Figura 14 apresenta os dados simulados da posição do satélite no sistema fixo (ECEF) para o período orbital de três órbitas do satélite Amazonia 1.

Além das características orbitais, é possível simular as características do movimento rotacional do satélite, ou seja, simular a atitude para cada instante. Nesse contexto, é importante ressaltar que o foco do trabalho é verificar a determinação de atitude usando o CSS e o magnetômetro e, por isso, não foi feita uma simulação do controle de atitude, logo a atitude é propagada com base em um estado inicial e não possui controle. A Figura 15 apresenta a simulação das componentes dos quatérnions e a Figura 16 apresenta a simulação das componentes do vetor de velocidade angular para três órbitas do Amazonia 1.

8.2 Albedo Terrestre

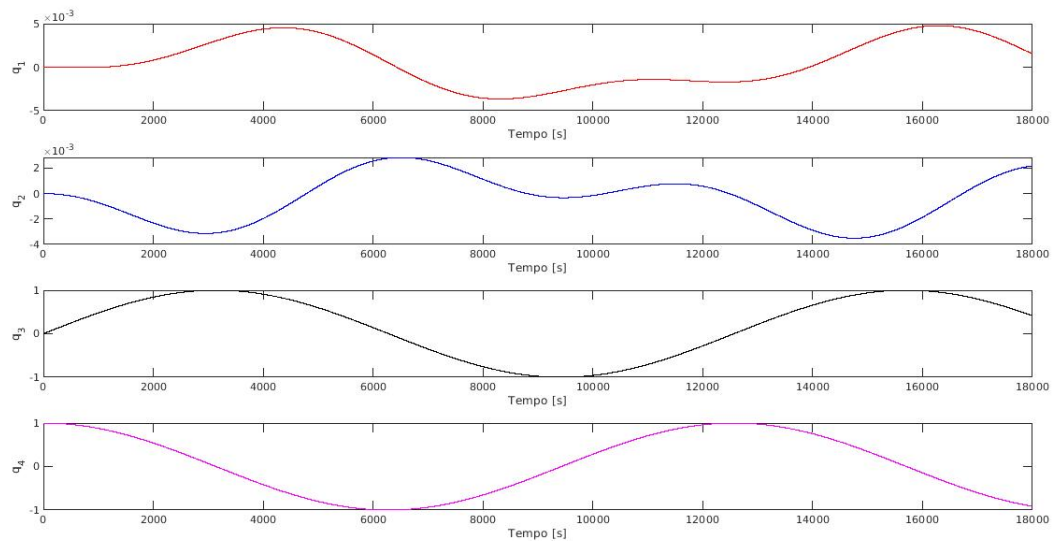
Nesta seção, é apresentado a simulação do modelo do albedo terrestre. Os resultados são baseados nos dados de refletividade obtidos através do satélite *Earth Probe satellite* no projeto *Total Ozone Mapping Spectrometer* (TOMS) que possui dados disponíveis virtualmente disponibilizados pela Administração Nacional da Aeronáutica e

Figura 14 – Simulação das componentes de posição e velocidade do satélite para três órbitas do Amazonia 1 no sistema fixo



Fonte: Autor

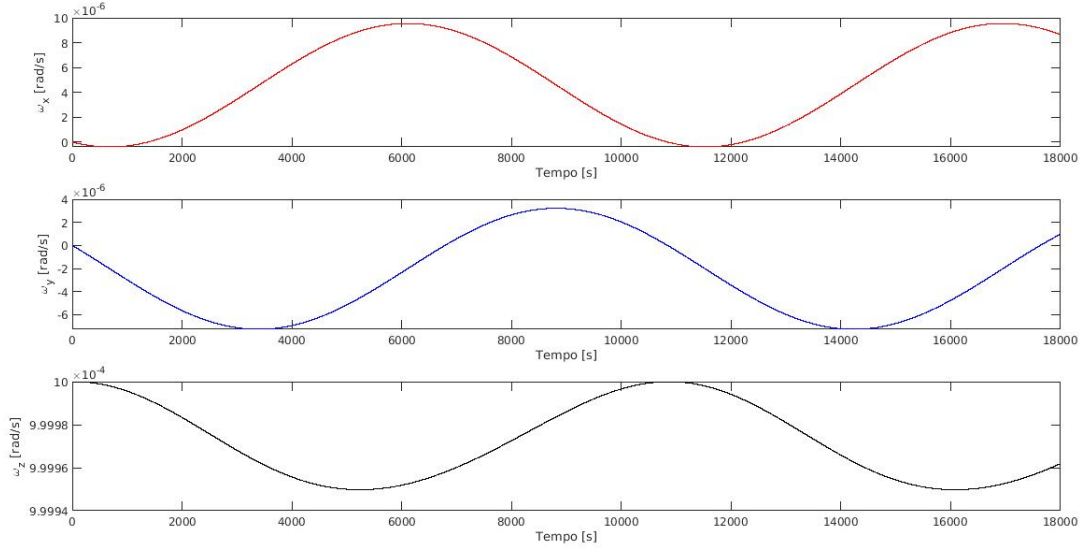
Figura 15 – Simulação das componentes dos quatérnions para três órbitas do Amazonia 1



Fonte: Autor

Espaço (*National Aeronautics and Space Administration* - NASA) para o ano de 2001. Primeiramente, é apresentado um exemplo do albedo terrestre para o primeiro instante da órbita do Amazonia-1. Depois calcula-se a interferência do albedo para todos os instantes da simulação. Os vetores neste capítulo são dados no referencial fixo (ECEF).

Figura 16 – Simulação das componentes da velocidade angular para três órbitas do Amazônia 1



Fonte: Autor

A coordenada esférica inicial do vetor posição utilizado neste exemplo é

$$\mathbf{r}_{\text{sat}} = \begin{pmatrix} 3,0164 \text{ rad} \\ 0,8574 \text{ rad} \\ 7130,6 \text{ km} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

A coordenada inicial do Sol no sistema fixo é dado por

$$\mathbf{r}_{\text{Sun}} = \begin{pmatrix} -0,8570 \text{ rad} \\ 0,4090 \text{ rad} \\ 1,0162 \text{ A.U.} \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

tal que as condições são estabelecidas através dos parâmetros iniciais das Tabela 1 e 2.

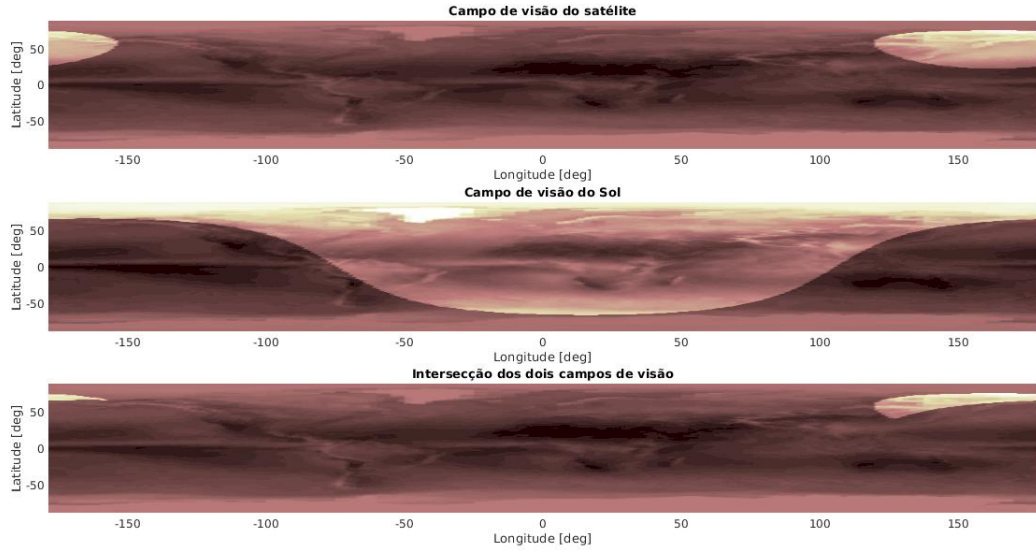
Com os dados da refletividade média de 2001, é possível ter o campo de visão (*Field of view* - FOV) do satélite, do Sol e a intersecção entre estas duas perspectivas, assim a Figura 17 apresenta estes parâmetros e sua variação de cores representam a intensidade em $[\text{W}/\text{m}^2]$, sendo que, quanto mais claro, mais intenso.

O cálculo do albedo terrestre é representado pela Figura 18 que considera os parâmetros adotados inicialmente.

Além disso, é possível gerar um gráfico em três dimensões para relacionar a latitude, longitude e irradiância do albedo terrestre. A Figura 19 traz essa perspectiva relacionando a latitude, longitude e irradiância do albedo terrestre para as condições estabelecidas.

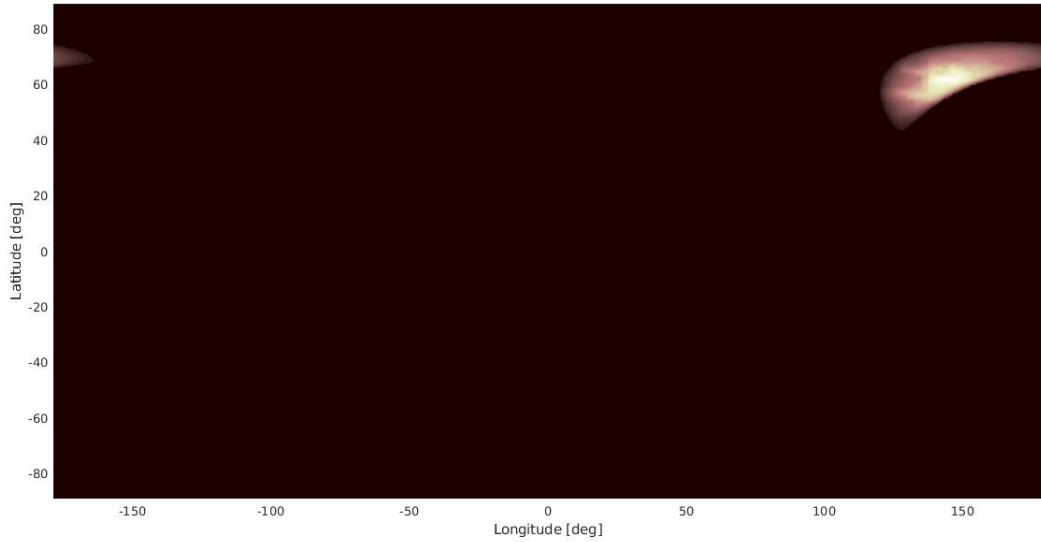
Com o resultado do albedo terrestre, é possível calcular o total da interferência do albedo terrestre para essa condição estabelecida. O valor total para essa condição é de

Figura 17 – Parâmetros do albedo terrestre. Campo de visão do satélite V_{sat} , campo de visão do Sol V_{Sun} e a intersecção entre os dois campos de visão $V_{\text{sat}} \cap V_{\text{Sun}}$



Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por [Bhanderi \(2022\)](#))

Figura 18 – Resultado do albedo terrestre com as condições estabelecidas pela Figura 17



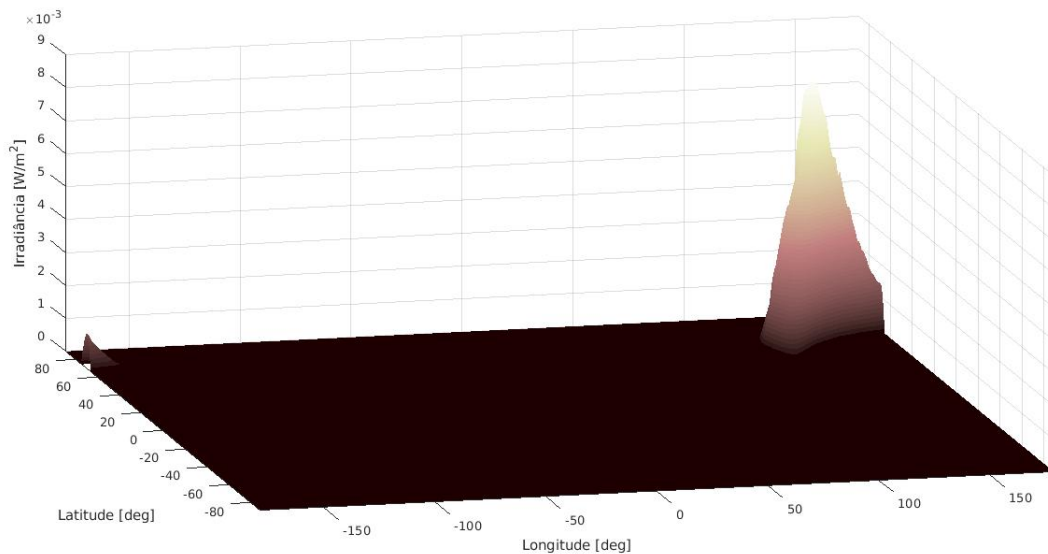
Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por [Bhanderi \(2022\)](#))

apenas $2,09 \text{ W/m}^2$, ou ainda, $0,15\%$ da constante da irradiância solar.

Aplicando o modelo do albedo terrestre na simulação do Amazonia 1, é possível determinar a interferência do albedo terrestre em cada instante da trajetória do satélite. O Amazonia 1 é um satélite de baixa órbita com altitude aproximada de 767 km para o apogeu e 752 km para o perigeu e que é impactado significativamente pelo albedo terrestre.

O modelo do albedo terrestre utilizado neste trabalho são os dados médios de

Figura 19 – Resultado do albedo terrestre com as condições estabelecidas em três dimensões relacionando latitude, longitude e irradiância



Fonte: Autor (com o uso do algoritmo desenvolvido por [Bhanderi \(2022\)](#))

refletividade obtidos via TOMS do ano de 2001. Foi utilizado o dado médio anual, porque os dados diários são incompletos como pode ser observado no Capítulo 4.

A influência do albedo terrestre em cada instante do satélite é apresentado na Figura 20 e a Figura 21 apresenta a taxa da interferência do albedo terrestre em porcentagem. O albedo terrestre é máximo quando o Sol está no zênite ([BHANDERI, 2005](#)). O máximo do albedo terrestre nestas condições de simulação é $641,88 \text{ W/m}^2$ ou 46,95% da constante de irradiância solar. A média durante este período orbital é de $147,69 \text{ W/m}^2$ ou 10,80%.

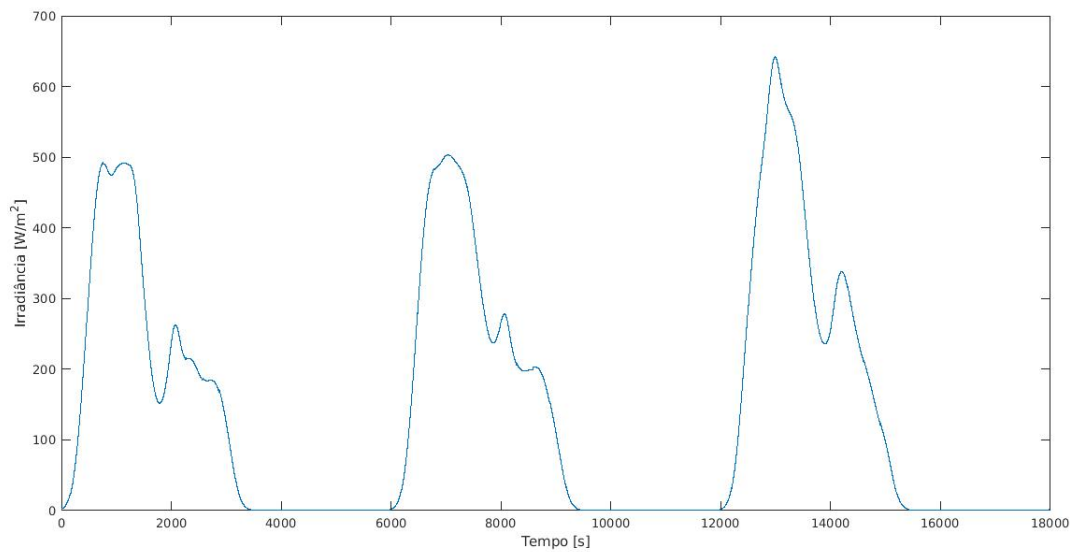
8.3 Dados dos Sensores Solares

A partir dos resultados obtidos através das Seções 8.2 e 8.1, é possível determinar o fluxo de corrente para cada um dos oito sensores do Amazonia 1. Os dados do albedo terrestre são os mesmos utilizados na seção anterior, ou seja, os dados anuais médios de refletividade de 2001.

Com o objetivo de introduzir o efeito da sombra da Terra e a sua influência em cada um dos sensores solares, é utilizado a função sombra desenvolvida por [Carrara \(2015\)](#) no PROPAT. Nessa perspectiva, agregando a função sombra na análise das correntes, é factível determinar o fluxo de corrente para as regiões em que o satélite está na região iluminada. A Figura 22 representa a simulação das correntes nos sensores solares (CSS) para a interferência apenas do fluxo de energia Sol.

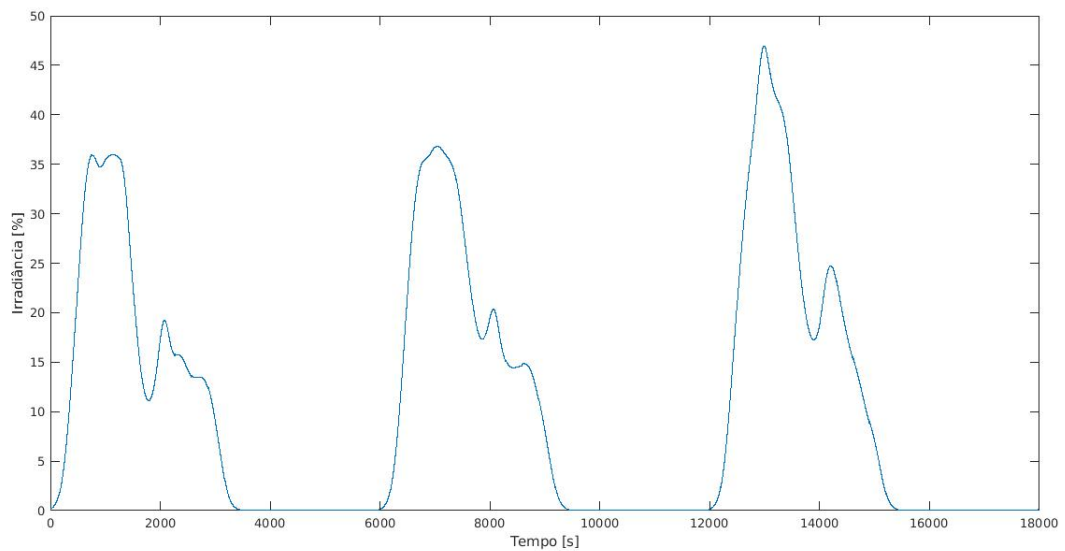
Da mesma forma, com os dados obtidos do albedo terrestre para cada instante como

Figura 20 – Simulação da interferência do albedo terrestre para três órbitas do Amazonia 1



Fonte: Autor

Figura 21 – Simulação da interferência do albedo terrestre em porcentagem para três órbitas do Amazonia 1

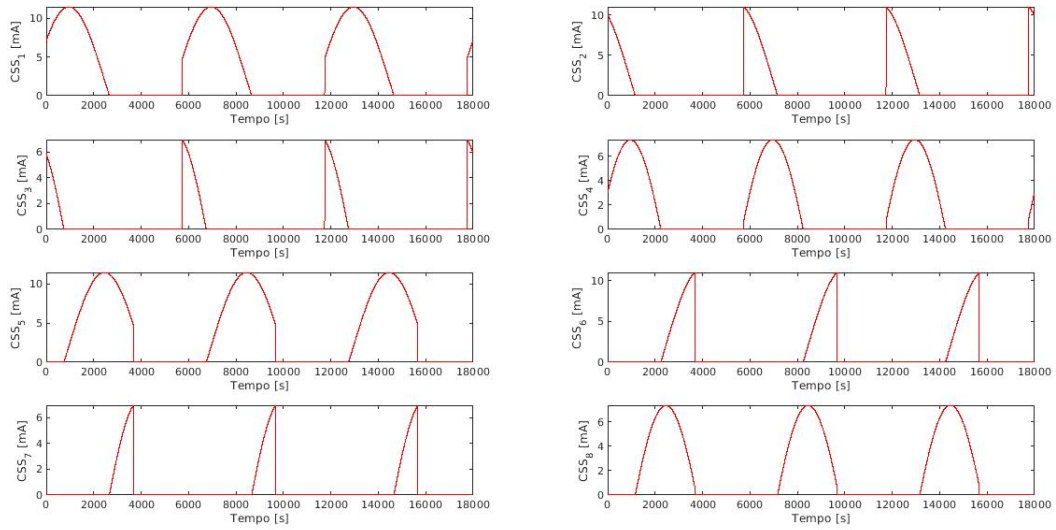


Fonte: Autor

observado na Figura 20, é possível fazer a simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do fluxo do albedo terrestre, assim a Figura 23 apresenta os resultados obtidos para a simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do albedo terrestre.

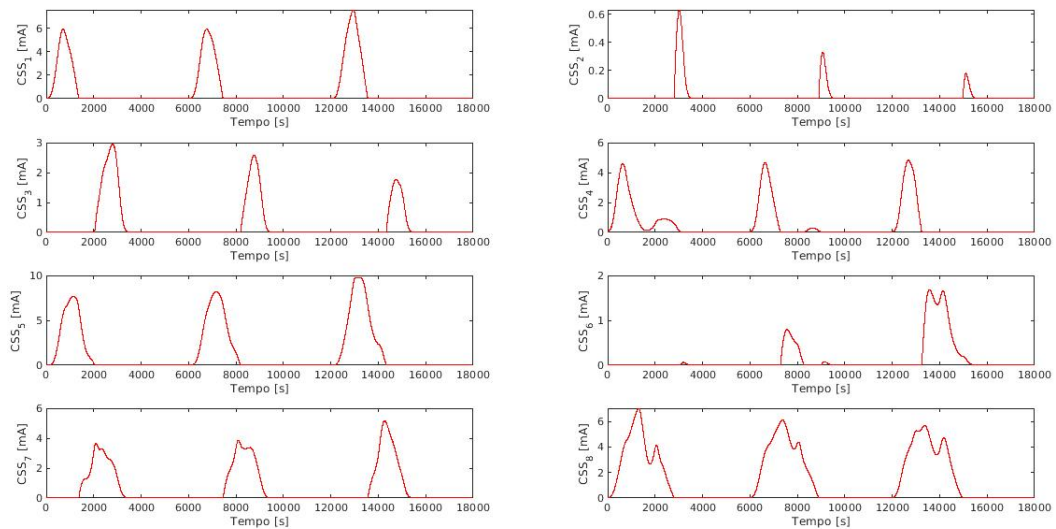
Com os resultados apresentados nas Figuras 22 e 23, é possível gerar um resultado total para cada instante da observação do Amazonia 1. A Figura 24 apresenta o total de

Figura 22 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do fluxo de energia Sol



Fonte: Autor

Figura 23 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência apenas do albedo terrestre



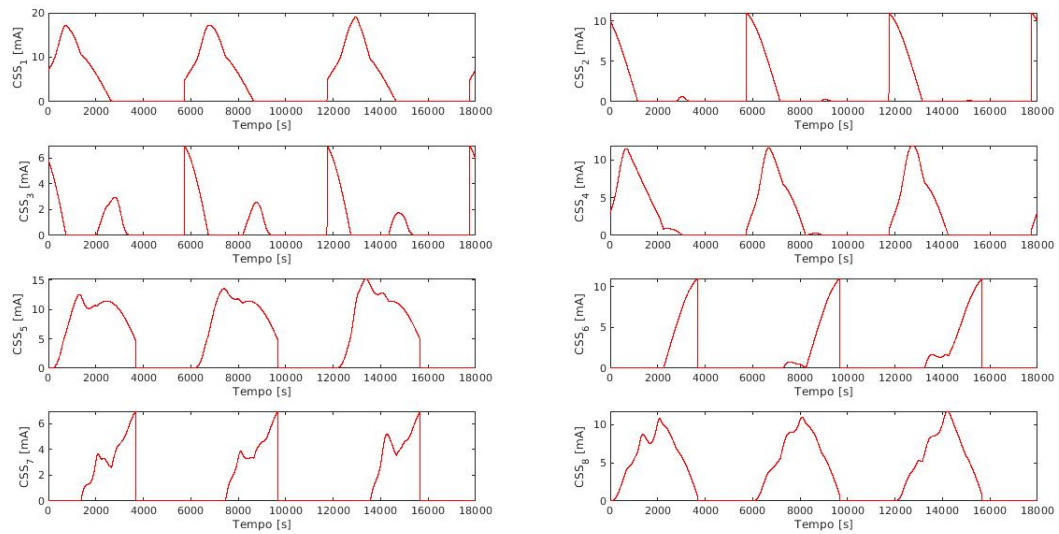
Fonte: Autor

corrente gerada por cada satélite considerando a interferência do Sol e do albedo terrestre.

Os dados médios da interferência do albedo terrestre nas correntes para cada um dos sensores são representados na Tabela 3. Estas médias consideram quando o satélite está no eclipse da Terra. Com estes resultados, é possível definir a taxa em porcentagem de interferência para o albedo terrestre e para o Sol.

Como o resultado da estimação do vetor solar é alterado pela interferência do

Figura 24 – Simulação das correntes nos sensores solares para a interferência do Sol e do albedo terrestre



Fonte: Autor

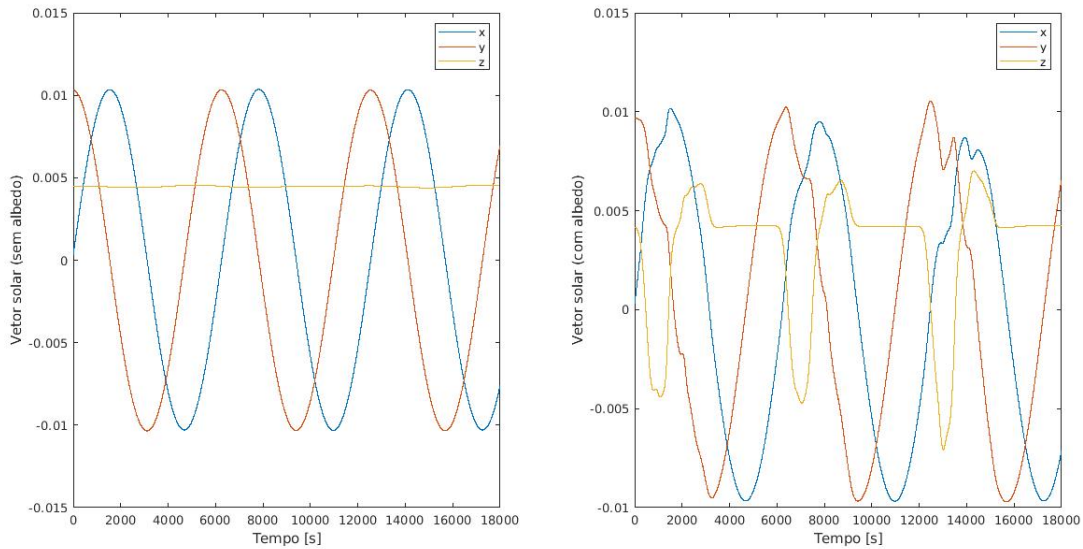
Tabela 3 – Corrente média gerada por cada sensor solar para três órbitas do Amazonia 1 para a interferência do Sol e do albedo terrestre e a taxa em porcentagem de interferência para o albedo terrestre e para o Sol

Sensor solar	Corrente média	Sol (%)	Albedo terrestre (%)
CSS ₁	4,64 mA	83,46%	16,54%
CSS ₂	1,52 mA	98,73%	1,27%
CSS ₃	0,95 mA	70,94%	29,06%
CSS ₄	2,59 mA	78,45%	21,55%
CSS ₅	5,34 mA	72,75%	27,25%
CSS ₆	1,64 mA	91,89%	8,11%
CSS ₇	1,39 mA	49,09%	50,91%
CSS ₈	3,60 mA	56,65%	43,35%

albedo terrestre, a Figura 25 representa o vetor solar real estimado sem a interferência do albedo terrestre e apresenta o resultado do vetor solar com a interferência do albedo terrestre. Nota-se que o albedo terrestre interfere significativamente na estimativa do vetor solar e, por isso, a determinação de atitude é impactada.

Dessa forma, nas próximas seções é feita a análise da interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1. A fim de uma análise mais precisa e elucidativa, é feita uma simulação sem incluir os efeitos do albedo terrestre e, depois, adiciona-se os efeitos do albedo terrestre em cada instante da simulação. Nesse contexto, é possível determinar o quão impactante é o albedo terrestre na atitude do satélite Amazonia 1.

Figura 25 – Simulação dos vetores solares sem a interferência do albedo terrestre e com a interferência do albedo terrestre, respectivamente



Fonte: Autor

8.4 TRIAD

Essa seção apresenta os resultados do algoritmo TRIAD. O TRIAD é baseado nos dois magnetômetros que medem o campo magnético da Terra e nos oito sensores solares que determinam a posição do Sol e que foram elucidados matematicamente no Capítulo 5.

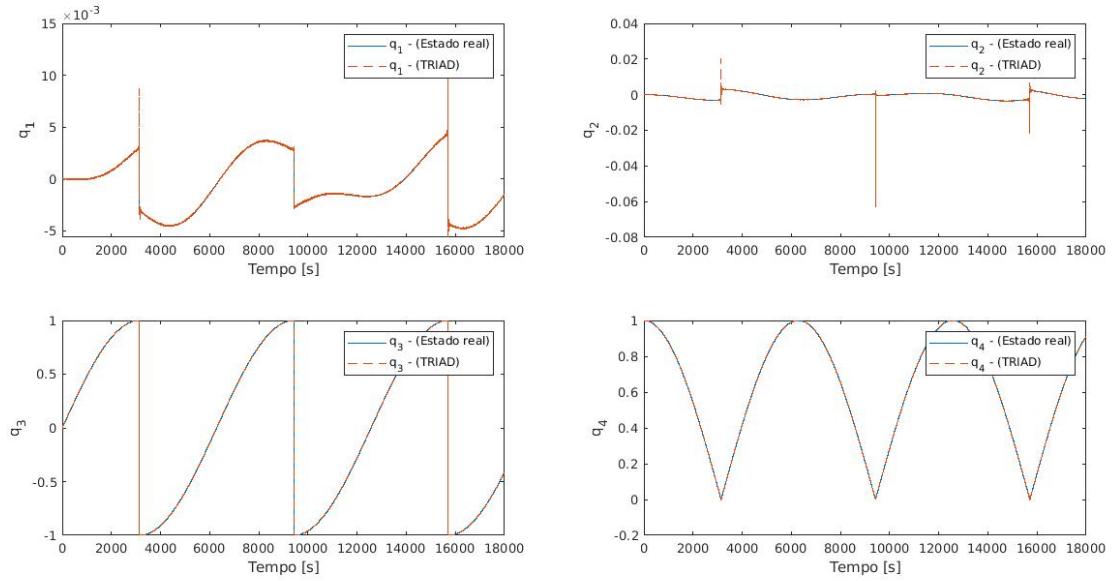
As condições iniciais utilizadas para a simulação orbital e da atitude foram as mesmas utilizadas nas Tabelas 1 e 2 para as três órbitas do Amazonia 1.

A Figura 26 apresenta os resultados do TRIAD em comparação com cada componente do quatérnio obtido via PROPAT. Para a simulação é considerado um ruído branco gaussiano (90%) para simular erros de origens aleatórias. Ademais, é válido ressaltar que foi imperativo definir que caso a componente real do quatérnio fosse negativa (q_4), o quatérnio ($\mathbf{q}$) deve ser negativo para que se evite ambiguidades na matriz de atitude.

Nota-se pela Figura 26 que o TRIAD possui alguns pontos em que o método não é tão eficiente e que há uma determinada imprecisão relacionada a este método. Essa imprecisão, provavelmente, é causada pela degradação da atitude devido a proximidade de pontos dos vetores solar e magnético.

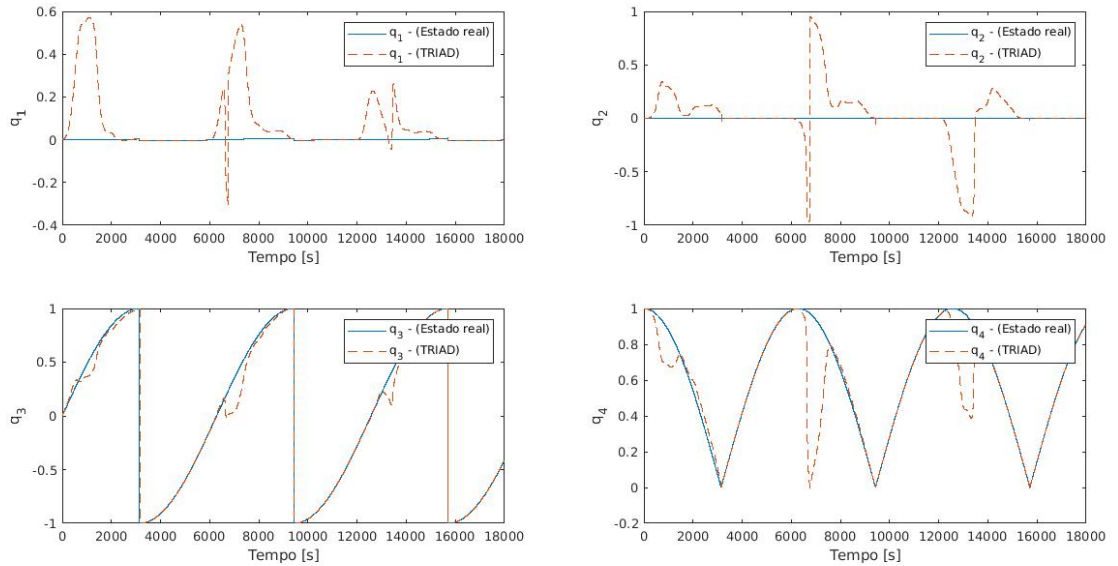
A partir da simulação do TRIAD, é possível simular a interferência do albedo terrestre em cada instante, já que a posição do Sol é estimada a partir das correntes geradas em cada um dos oito sensores solares. Assim, a Figura 27 apresenta os resultados do TRIAD em comparação com cada componente do quatérnio obtido via PROPAT com a interferência do albedo terrestre.

Figura 26 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o TRIAD sem a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

Figura 27 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o TRIAD com a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

8.5 Q-Method

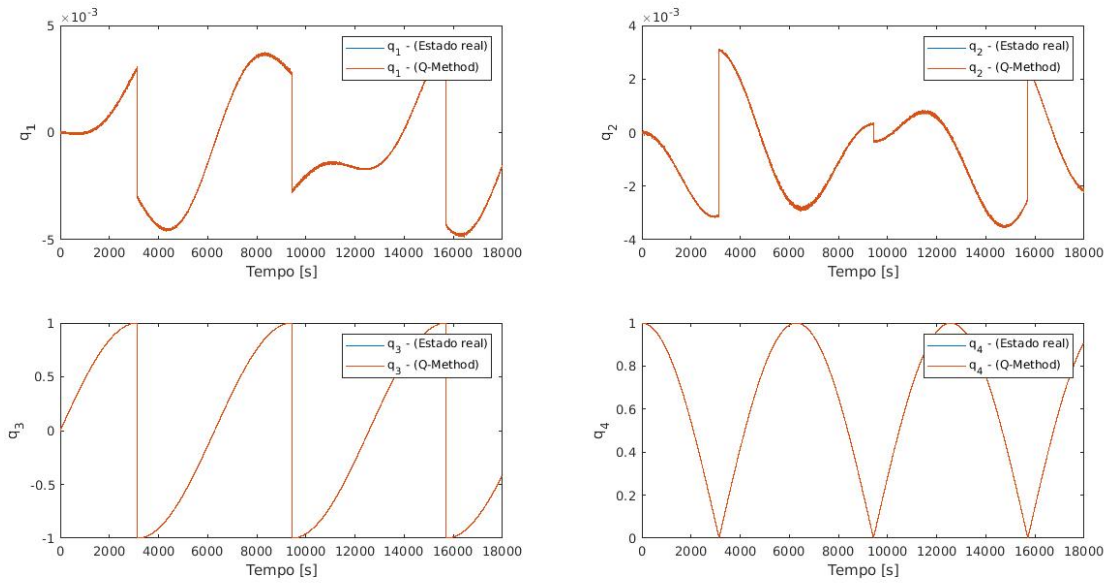
O Q-Method é outro método estático para determinação de atitude, ou seja, não usa métodos estocásticos para atualizar o valor da atitude. Nesse trabalho, o Q-Method é baseado no campo magnético da Terra e na posição do Sol, como o TRIAD.

Da mesma forma que a Seção 8.4, as condições iniciais utilizadas para a simulação

orbital e da atitude foram as mesmas utilizadas nas Tabelas 1 e 2 para as três órbitas do Amazonia 1.

A Figura 28 apresenta os resultados do Q-Method em comparação com cada componente do quatérnio obtido via PROPAT. Para a simulação é considerado um ruído branco gaussiano para simular erros de origens aleatórias. Ademais, é válido ressaltar que foi imperativo definir as mesmas condições que foram estabelecidas no TRIAD.

Figura 28 – Determinação de atitude em quatérnios utilizando o Q-Method sem a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

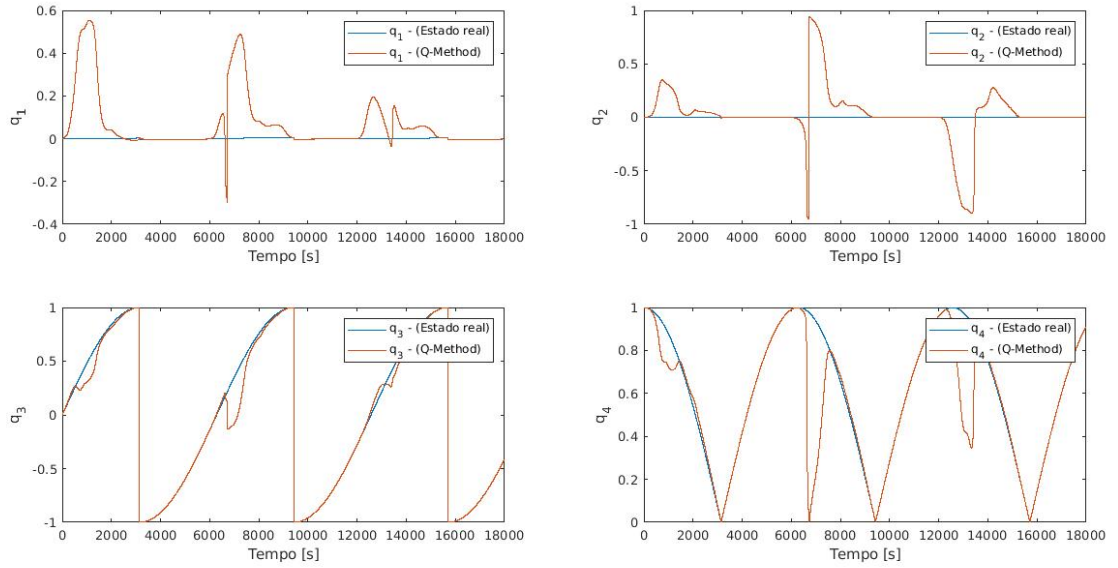
A partir da simulação do Q-Method, é possível simular a interferência do albedo terrestre em cada instante, já que a posição do Sol é estimada a partir das correntes geradas em cada um dos oito sensores solares. Assim, a Figura 29 apresenta os resultados do Q-Method em comparação com cada componente do quatérnio obtido via PROPAT com a interferência do albedo terrestre.

8.6 QUEST

O método QUEST (*Quaternion ESTimator*) também é um algoritmo para solucionar o problema de Wahba, tal que o método QUEST fornece estimativas ótimas locais da atitude através do critério de mínimos quadrados sem necessitar da modelagem matemática do sistema dinâmico (SHUSTER; OH, 1981; VAROTTO, 1989).

Da mesma forma que a Seção 8.4, as condições iniciais utilizadas para a simulação orbital e da atitude foram as mesmas utilizadas nas Tabelas 1 e 2 para as três órbitas do Amazonia 1.

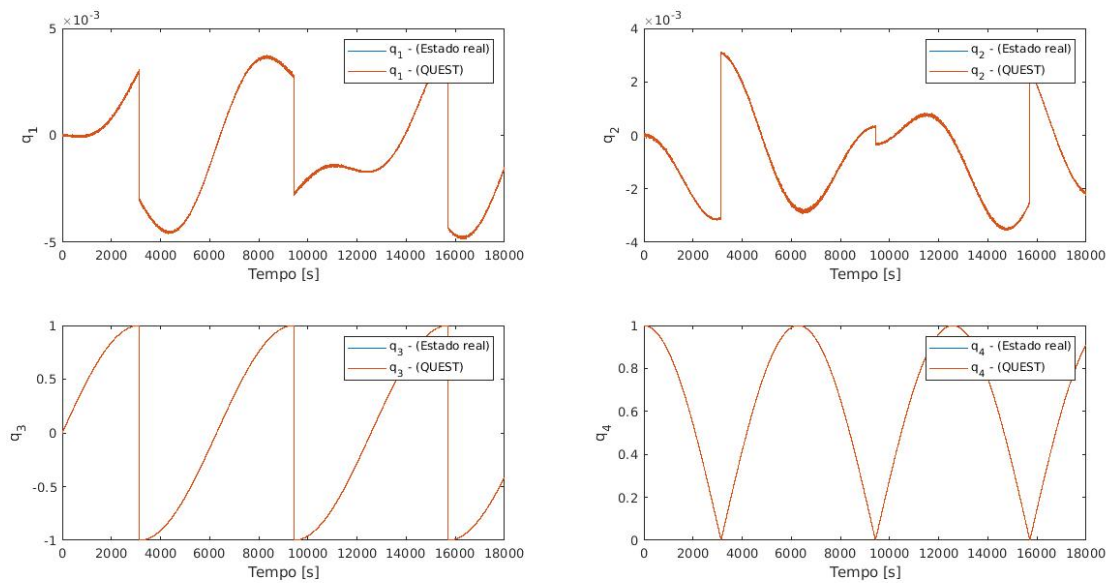
Figura 29 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o Q-Method com a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

A Figura 30 apresenta os resultados do QUEST em comparação com cada componente do quatérnion obtido via PROPAT. Para a simulação é considerado um ruído branco gaussiano para simular erros de origens aleatórias e caóticas. Ademais, é válido ressaltar que foi imperativo definir as mesmas condições que foram estabelecidas no TRIAD.

Figura 30 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o QUEST sem a interferência do albedo terrestre

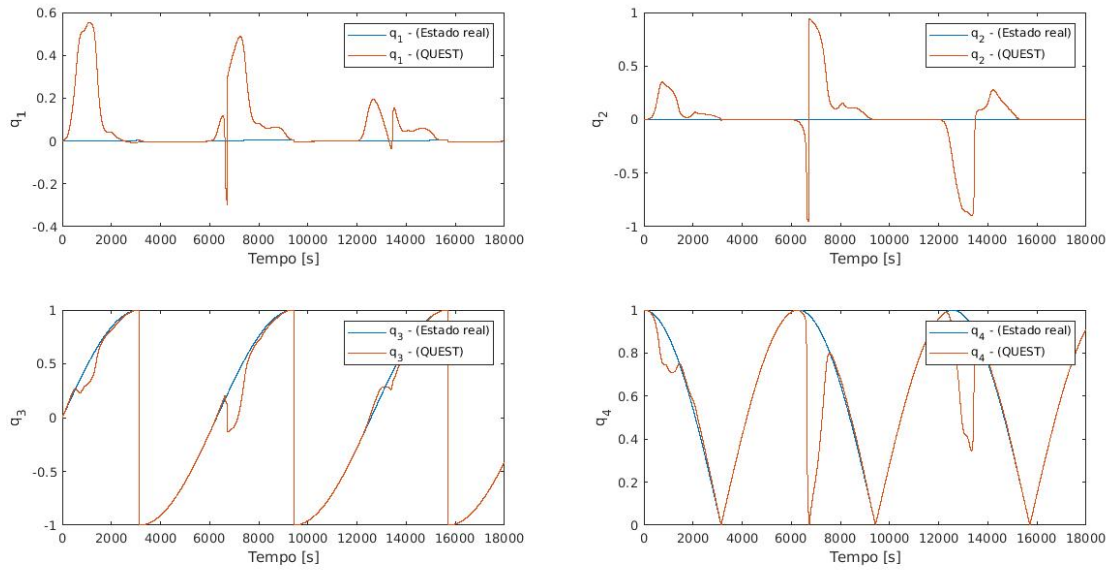


Fonte: Autor

A partir da simulação do QUEST, é possível simular a interferência do albedo

terrestre em cada instante, já que a posição do Sol é estimada a partir das correntes geradas em cada um dos oito sensores solares. Assim, a Figura 31 apresenta os resultados do QUEST em comparação com cada componente do quatérnion obtido via PROPAT com a interferência do albedo terrestre.

Figura 31 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando o QUEST com a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

8.7 Solução Analítica para o Problema de Wahba descrita por Yang e Zhou (2013)

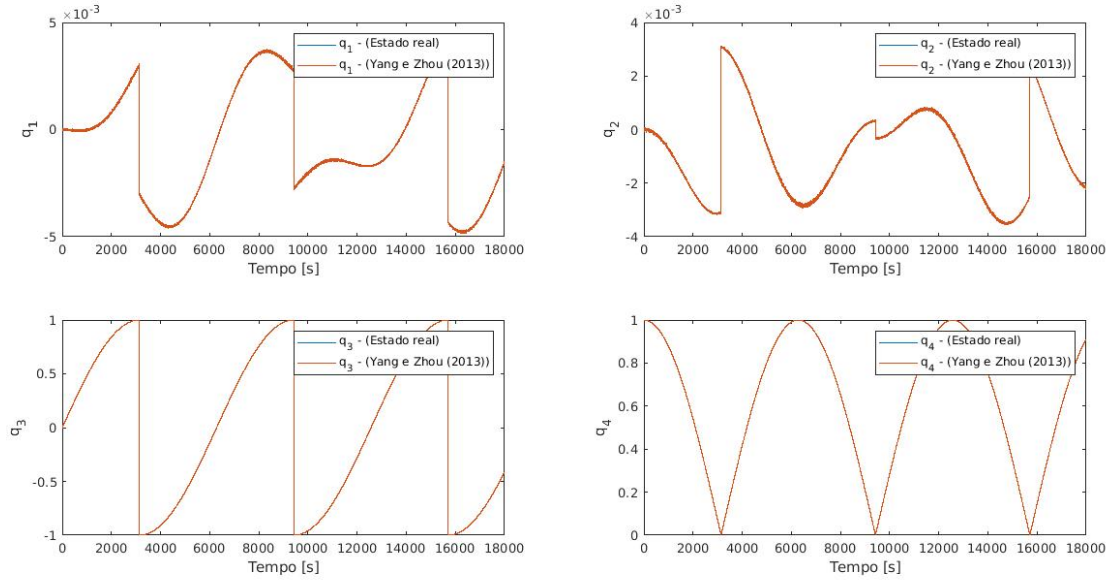
A solução que foi desenvolvida por Yang e Zhou (2013) para solucionar o problema de Wahba é proposto por Shmakov (2011) que desenvolve um método para solucionar o polinômio quártico do QUEST.

Da mesma forma que a Seção 8.4, as condições iniciais utilizadas para a simulação orbital e da atitude foram as mesmas utilizadas nas Tabelas 1 e 2 para as três órbitas do Amazonia 1.

A Figura 32 apresenta os resultados da solução analítica para a determinação de atitude em comparação com cada componente do quatérnion obtido via PROPAT. Para a simulação é considerado um ruído branco gaussiano para simular erros de origens aleatórias e caóticas. Ademais, é válido ressaltar que foi imperativo definir as mesmas condições que foram estabelecidas no TRIAD.

A partir da simulação da solução analítica de Yang e Zhou (2013), é possível simular a interferência do albedo terrestre em cada instante, já que a posição do Sol é estimada

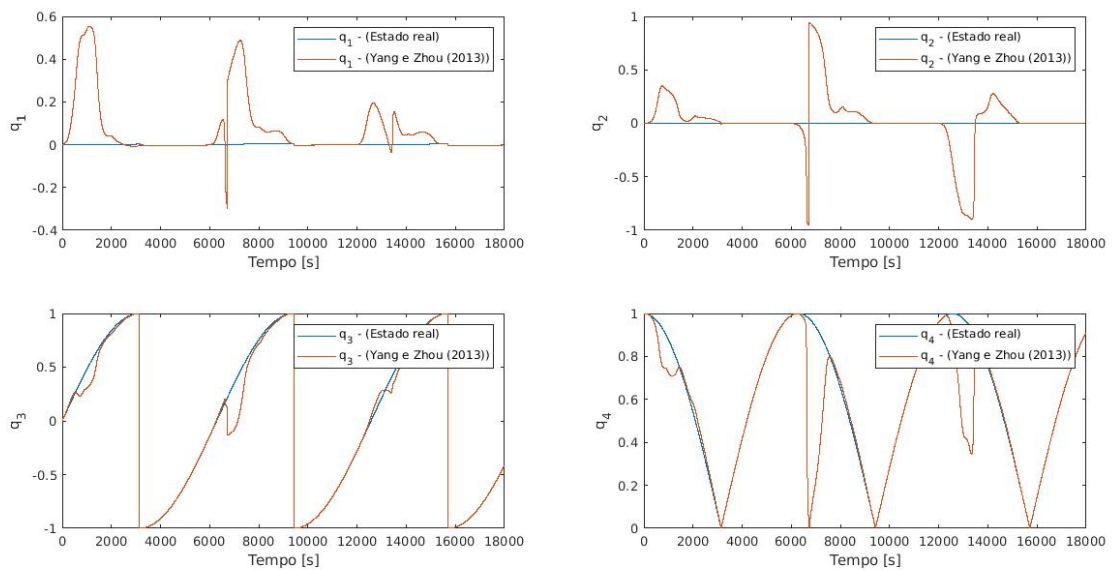
Figura 32 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando a solução analítica de Yang e Zhou (2013) para a determinação de atitude sem a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

a partir das correntes geradas em cada um dos oito sensores solares. Assim, a Figura 33 apresenta os resultados do QUEST em comparação com cada componente do quatérnion obtido via PROPAT com a interferência do albedo terrestre.

Figura 33 – Determinação de atitude em quatérnions utilizando a solução analítica de Yang e Zhou (2013) com a interferência do albedo terrestre



Fonte: Autor

8.8 Discussão de resultados

Dessa forma, afim de realizar uma discussão sobre os resultados obtidos, o tempo médio de CPU para todos os processos são relativamente altos. A Tabela 4 apresenta o tempo médio para o TRIAD, Q-Method, QUEST e o método desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#). Ademais, é válido ressaltar que toda a simulação orbital e de atitude são calculadas todas as vezes que o algoritmo é rodado e, por isso, o tempo computacional é relativamente alto.

Tabela 4 – Tempo médio para cada um dos métodos desenvolvidos neste trabalho

Método	Tempo médio
TRIAD	5,036996 s
Q-Method	5,721682 s
QUEST	7,432500 s
Yang e Zhou (2013)	7,562523 s

A determinação de atitude a partir de métodos estáticos são mais rápidos do que quando comparados com os métodos estocásticos ([MARKLEY; CRASSIDIS, 2014](#)). Como são utilizados números de origens randômicas para simular o ruído branco gaussiano, é fixado uma semente fixa para que toda vez que é feita a simulação, o algoritmo retorne os mesmos resultados.

De acordo com os resultados apresentados nas seções anteriores e comparando os erros, é possível definir um método mais preciso. O método mais preciso para as condições definidas nas Tabelas 1 e 2 e com a mesma taxa de ruído branco gaussiano foi o QUEST para a simulação sem o albedo terrestre. É trivial que se o ruído e as imprecisões são elevadas, o método de determinação de atitude não terá uma performance precisa.

Outrossim, com a interferência do albedo terrestre, aumenta-se significativamente os erros em comparação com a atitude de referência. Como os quatérnions não possuem uma descrição física óbvia, é feita a transformação para o ângulo principal de Euler (Φ) para compreender geometricamente a interferência angular. Em primeiro momento, a Tabela 5 apresenta o erro médio para cada uma das simulações feitas neste trabalho sem a interferência do albedo terrestre.

Tabela 5 – Média dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler sem a interferência do albedo terrestre

	TRIAD	Q-Method	QUEST	Yang e Zhou (2013)
Ângulo [deg]	$-3,6294 \times 10^{-4}$	$2,3324 \times 10^{-6}$	$2,1501 \times 10^{-6}$	$8,4744 \times 10^{-6}$

Depois da simulação sem o albedo terrestre, é considerado o albedo terrestre em cada instante da estimação da posição do Sol e com estes resultados é possível determinar a média dos erros referente à determinação de atitude no ângulo principal de Euler com a interferência do albedo terrestre que é apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 – Média dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler com a interferência do albedo terrestre

	TRIAD	Q-Method	QUEST	Yang e Zhou (2013)
Ângulo [deg]	10,4865	9,9649	9,9649	9,9650

Com a análise da Tabela 6, é possível notar que o albedo terrestre interfere significativamente na estimação do vetor solar determinada pelos sensores solar e, por isso, a atitude é calculada com erros elevados. Além disso, é essencial que a determinação de atitude robusta feita com base no sensor solar e no magnetômetro seja precisa, já que dependendo da interferência do albedo terrestre, os sensores de estrela possivelmente vão apresentar grandes intervalos de erros para a detecção de falhas.

Após os resultados das médias dos erros do albedo terrestre, é interessante notar os desvios-padrão para cada um dos métodos abordados. A Tabela 7 apresenta os desvios-padrão para cada um dos métodos abordados do ângulo principal de Euler.

Tabela 7 – Desvios-padrão dos erros referente à determinação de atitude do ângulo principal de Euler com a interferência do albedo terrestre

	TRIAD	Q-Method	QUEST	Yang e Zhou (2013)
Ângulo [deg]	29,8620	29,1841	29,1841	29,1841

Com a análise da Tabela 7, é possível notar que o desvio-padrão alto indica que os resultados são heterôgeneos e descondesados fora da média.

Dessa forma, com a análise das Tabelas 6 e 7, conclui-se que o Q-Method e o QUEST se mostram mais precisos do que quando comparado com os outros métodos. Entretanto, é válido ressaltar que em todos os determinados pontos, apresentam erros elevados para a determinação de atitude robusta.

Ademais, é válido ressaltar que outros métodos para a solução do problema de Wahba como os desenvolvidos por Markley (1988), Markley (1993), Yang (2015), Wu et al. (2017) não são considerados neste trabalho, mas destaca-se a importância matemática e computacional para cada um destes trabalhos para a determinação de atitude.

9 Conclusões

O objetivo principal deste trabalho é determinar a interferência do albedo terrestre na determinação de atitude do satélite Amazonia 1 com diferentes métodos. Os métodos escolhidos neste trabalho são métodos de determinação estática todos utilizando a parametrização dos quatérnions. Nesse contexto, utiliza-se o TRIAD, Q-Method, QUEST e um método de solução analítica para o problema de Wahba desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) para determinar a atitude do Amazonia 1.

Com a simulação de atitude e de órbita do satélite Amazonia 1 considerando o período de três órbitas, foi determinado algumas condições para os sensores solares e os magnetômetros. Nessa perspectiva, é calculado a interferência do albedo terrestre para cada instante da órbita e para as condições estabelecidas, tem-se que o máximo do albedo terrestre é $641,88 \text{ W/m}^2$ ou 46,95% da constante de irradiância solar e a média durante este período orbital é de $147,69 \text{ W/m}^2$ ou 10,80%. Além disso, é indubitável que as taxas variam com a altitude, latitude e longitude e que uma análise para a mudança nessas condições são elaboradas em [Bhanderi \(2005\)](#).

Nota-se que a interferência do albedo terrestre em cada um dos oito sensores solares presentes nos vértices do Amazonia 1 possuem taxas significativas e que contribuem para a presença dos erros relacionados à estimação do vetor do Sol.

Dessa forma, com os resultados obtidos através dos sensores solares e pelo magnetômetro, é possível determinar a atitude. Nesse trabalho, utiliza-se o TRIAD, o Q-Method, o QUEST e um método de solução analítica para o problema de Wahba desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) para determinar a atitude do Amazonia 1. Conclui-se que o TRIAD é o mais impreciso quando comparado com os outros métodos estudados, já que apresenta um erro mais elevado quando a atitude é determinada. Os métodos Q-Method, QUEST e o desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) apresentam resultados próximos e precisos quando comparados um com os outros. Nesse trabalho, destaca-se a precisão constante do QUEST e do Q-Method tanto para as medidas sem o albedo terrestre. O método de [Yang e Zhou \(2013\)](#) apresenta alguns pontos de inflexões que causam perturbações na determinação de atitude do satélite.

Como os quatérnions não possuem uma descrição física óbvia, é imperativo fazer uma mudança de parâmetros de atitude para uma melhor compreensão. Nesse caso, foi escolhido o ângulo principal de Euler, que é um parâmetro amplamente utilizado na indústria aeroespacial. Nota-se que o erro médio para o QUEST sem considerar o albedo terrestre foi o menor de todos os métodos comparados neste trabalho, sendo que apresenta um erro médio de $2,1501 \times 10^{-6}$. Desse modo, como o erro entre a determinação e a atitude

de referência é baixa, pode-se dizer que o método é preciso.

Para a abordagem da estimação do vetor solar a partir dos sensores solares com a interferência do albedo terrestre, destaca-se que o Q-Method, QUEST e o método analítico desenvolvido por [Yang e Zhou \(2013\)](#) se mostram com erros relativamente próximos, mas que todos apresentam erros elevados em comparação ao método sem a interferência do albedo terrestre. Além disso, é possível notar que os desvios-padrão são altos e indicam que os resultados são heterôgeneos.

Portanto, com a análise da determinação de atitude com e sem a interferência do albedo terrestre, é possível notar que o albedo terrestre possui uma relevância na determinação de atitude do satélite e que não é recomendado usar modelos ruidosos para determinar a atitude do satélite. Uma análise do efeito do albedo terrestre é essencial para satélites que possuem painéis solares girantes ótimos que buscam o melhor posicionamento do Sol para receber energia, como o Amazonia 1 e também é necessária para garantir que a determinação de atitude robusta feita com base no sensor solar e magnetômetro seja precisa, já que dependendo da interferência do albedo terrestre, os sensores de estrela possivelmente vão apresentar grandes intervalos de erros.

9.1 Trabalhos Futuros

No decorrer deste trabalho, utilizou-se a formulação das equações cinemáticas em quatérnions. A vantagem na aplicação dos quatérnions é evidente com os métodos que são utilizados neste trabalho, entretanto a sua descrição física não é óbvia e, por isso, destaca-se que pode ser utilizado diferentes métodos para essa análise.

A seguir estão apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- No artigo desenvolvido por [Cilden-Guler et al. \(2021\)](#), os dados do albedo terrestre são obtidos via CERES (*Clouds and the Earth's Radiant Energy System*) desenvolvido pela NASA. O CERES trata-se de dados mais atualizados do que os obtidos via TOMS (*Total Ozone Mapping Spectrometer*) e, por isso, recomenda-se o uso destes novos dados para determinar a interferência do albedo terrestre e comparar com estes resultados.
- Utilizar diferentes métodos para a estimação do vetor solar com base em artigos já desenvolvidos. O artigo desenvolvido por [Bhanderi \(2005\)](#) apresenta alguns destes métodos que podem ser explorados em trabalhos posteriores.
- Implementar outros métodos para a determinação de atitude. Alguns exemplos para a solução do problema de Wahba como os desenvolvidos por [Markley \(1988\)](#), [Markley](#)

(1993), Yang (2015), Wu et al. (2017) podem ser utilizados e comparados com este trabalho.

- Utilizar métodos estocásticos diferentes para a determinação de atitude, como o Filtro de Kalman Estendido, Filtro de Kalman *Unscented*, Filtro de Partículas H_∞ Estendido e o Filtro de partículas *Rao-Blackwellized* e comparar com métodos de determinação estática.

Referências

ALMEIDA, M. P. C. de. *Modelamento de Efeitos de Propagação em Enlaces Satélite de Órbita Baixa*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2003. Citado na página 33.

APPEL, P. Attitude estimation from magnetometer and earth-albedo-corrected coarse sun sensor measurements. *Acta Astronautica*, Elsevier, v. 56, n. 1-2, p. 115–126, 2005. Citado na página 30.

BAR-ITZHACK, I. Y.; HARMAN, R. R. Optimized triad algorithm for attitude determination. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 20, n. 1, p. 208–211, 1997. Citado na página 30.

BHANDERI, D. *Spacecraft attitude determination with Earth albedo corrected Sun sensor measurements*. [S.l.]: Department of Control Engineering, Aalborg University, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 26, 30, 43, 44, 70, 83 e 84.

BHANDERI, D. *Earth Albedo Toolbox*. 2022. <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11226-earth-albedo-toolbox>>. Acesso em: 22 set 2022. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 69 e 70.

BHANDERI, D.; BAK, T. Modeling earth albedo for satellites in earth orbit. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 6465. Citado 8 vezes nas páginas 37, 38, 39, 40, 41, 42, 59 e 60.

BORDERIES, N.; LONGARETTI, P.-y. A new treatment of the albedo radiation pressure in the case of a uniform albedo and of a spherical satellite. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 49, n. 1, p. 69–98, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

BRASOVEANU, D.; SEDLAK, J. Analysis of earth albedo effect on sun sensor measurements based on theoretical model and mission experience. In: *AAS/GSFC 13th International Symposium on Space Flight Dynamics*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, n. AAS-98-338. Citado na página 30.

BRYSON, A. E. *Control of spacecraft and aircraft*. [S.l.]: Princeton university press Princeton, 1993. v. 41. Nenhuma citação no texto.

CAHILL, L. J.; AMAZEEN, P. The boundary of the geomagnetic field. *Journal of Geophysical Research*, Wiley Online Library, v. 68, n. 7, p. 1835–1843, 1963. Citado na página 46.

CARLEIAL, A. Avaliação de maturidade tecnológica com aplicação de calculadora de trl em projeto do programa espacial brasileiro. 06 2014. Citado na página 46.

CARRARA, V. An open source satellite attitude and orbit simulator toolbox for matlab. In: *Proceedings of the 17th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–12. Citado 4 vezes nas páginas 26, 46, 65 e 70.

- ÇELIK, O.; HAJIYEV, C. A comparison of attitude determination methods for small satellites. In: IEEE. *2013 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*. [S.l.], 2013. p. 261–264. Citado na página 57.
- CILDEN-GULER, D. et al. Attitude estimation with albedo interference on sun sensor measurements. *Journal of Spacecraft and Rockets*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 58, n. 1, p. 148–163, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 84.
- CRASSIDIS, J. L.; JUNKINS, J. L. *Optimal estimation of dynamic systems*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2004. Citado na página 60.
- FABRI, S. M. Determinação de atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação com o uso do gps. 1997. Citado na página 47.
- FARRELL, J. L. Attitude determination by kalman filtering. *Automatica*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 419–430, 1970. Citado na página 29.
- FISHER, H.; MUSSER, K. L.; SHUSTER, M. D. Coarse attitude determination from earth albedo measurements. *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, IEEE, v. 29, n. 1, p. 22–26, 1993. Citado na página 29.
- FRÖHLICH, C.; LEAN, J. Total solar irradiance (tsi) composite database (1978-present). *Accessado em Agosto*, v. 26, 2022. Citado na página 39.
- GARCIA, R. V.; KUGA, H.; ZANARDI, M. Filtro não-linear de kalman sigma-ponto com algoritmo unscented aplicado a estimativa dinâmica da atitude de satélites artificiais. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos/SP*, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 31, 34, 35, 53 e 54.
- GEORGEVIC, R. *Mathematical model of the solar radiation force and torques acting on the components of a spacecraft*. [S.l.], 1971. Citado na página 37.
- HATCHER, N. M. *A Survey of Attitude Sensors for Spacecraft*. [S.l.]: Scientific and Technical Information Division, Office of Technology, 1967. v. 145. Citado na página 47.
- HERMAN, J. et al. Changes in the earth's uv reflectivity from the surface, clouds, and aerosols. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, Wiley Online Library, v. 106, n. D6, p. 5353–5368, 2001. Citado na página 38.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012. Citado na página 61.
- INPE. *Plataforma Multimissão (PMM)*. 2022. <http://www.inpe.br/amazonia1/sobre_satelite/pmm.php>. Acesso em: 12 nov 2022. Citado na página 25.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960. Nenhuma citação no texto.
- KHALIFA, N.; SHARAF-ELDIN, T. Earth albedo perturbations on low earth orbit cubesats. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences, v. 14, n. 2, p. 193–199, 2013. Citado na página 31.
- KOPP, G.; LEAN, J. L. A new, lower value of total solar irradiance: Evidence and climate significance. *Geophysical Research Letters*, Wiley Online Library, v. 38, n. 1, 2011. Citado na página 39.

- LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 5, n. 5, p. 417–429, 1982. Citado na página 29.
- LERNER, G. M. Three-axis attitude determination. *Spacecraft attitude determination and control*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, v. 73, p. 420–428, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 58.
- LOPES, R. et al. Analysis of albedo effects on coarse sun direction determination algorithms. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 4, n. 1, p. 10, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 31, 43 e 44.
- MARKLEY, F. L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *Journal of the Astronautical Sciences*, v. 36, n. 3, p. 245–258, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 32, 81 e 84.
- MARKLEY, F. L. Attitude determination using vector observations: A fast optimal matrix algorithm. In: *Flight Mechanics (Estimation Theory Symposium, 1992*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado 3 vezes nas páginas 32, 81 e 85.
- MARKLEY, F. L. Attitude determination using two vector measurements. 1998. Citado na página 30.
- MARKLEY, F. L.; CRASSIDIS, J. L. *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 8 vezes nas páginas 25, 43, 45, 57, 59, 61, 62 e 80.
- MARKLEY, F. L.; MORTARI, D. How to estimate attitude from vector observations. In: *Astrodynamics Specialist*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página 58.
- MARKLEY, F. L.; MORTARI, D. Quaternion attitude estimation using vector observations. *The Journal of the Astronautical Sciences*, Springer, v. 48, n. 2, p. 359–380, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 62.
- MELLO, S. F. Analytical study of the earth's shadowing effects on satellite orbits. *Celestial mechanics*, Springer, v. 5, n. 1, p. 80–101, 1972. Citado na página 41.
- NASA. *Total Ozone Mapping Spectrometer-Earth Probe (TOMS-EP)*. 2019. <<https://eosps.nasa.gov/missions/total-ozone-mapping-spectrometer-earth-probe>>. Acesso em: 24 jul 2022. Citado na página 37.
- O'KEEFE, S. A.; SCHAUB, H. Consider-filter-based on-orbit coarse sun sensor calibration sensitivity. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 40, n. 5, p. 1300–1303, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- POLYANIN, A. D.; MANZHIROV, A. V. *Handbook of mathematics for engineers and scientists*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2006. Citado na página 62.
- POTTER, J. E.; VELDE, W. V. Optimum mixing of gyroscope and star tracker data. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v. 5, n. 5, p. 536–540, 1968. Citado na página 29.

RIBEIRO, G. A. X.; GARCIA, R. V.; KUGA, H. K. Análise do torque de pressão de radiação solar na propagação da órbita do satélite cbers-4a. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 8, n. 1, 2021. Citado na página 37.

RIBEIRO, G. A. X.; KUGA, H. K.; GARCIA, R. V. *Um estudo sobre a interferência das matrizes de covariâncias do Filtro de Kalman Estendido na estimação da atitude em quatérnions*. São José dos Campos, 2022. Bolsa PIBIC/PIBITI/INPE/CNPq. Citado na página 32.

RIBEIRO, G. A. X.; SILVA, W. R.; CANDIOTO, K. C. G. *attitude-parameters*. Zenodo, 2021. Disponível em: <<https://zenodo.org/record/5767547>>. Citado na página 32.

ROCCO, E. M. Evaluation of the terrestrial albedo applied to some scientific missions. *Space Science Reviews*, Springer, v. 151, n. 1, p. 135–147, 2010. Citado na página 31.

RYER, A. *Light measurement handbook*. Citeseer, 1997. Citado na página 41.

SCHAUB, H.; JUNKINS, J. L. *Analytical mechanics of space systems*. [S.l.]: Aiaa, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 49, 50, 51, 52 e 53.

SHEPPERD, S. W. Quaternion from rotation matrix. *Journal of guidance and control*, v. 1, n. 3, p. 223–224, 1978. Citado na página 53.

SHMAKOV, S. L. A universal method of solving quartic equations. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 71, n. 2, p. 251–259, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 78.

SHUSTER, M. D. Maximum likelihood estimation of spacecraft attitude. *J. Astronaut. Sci.*, v. 37, p. 79–88, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.

SHUSTER, M. D.; OH, S. D. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of guidance and Control*, v. 4, n. 1, p. 70–77, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 29, 58, 60 e 76.

SHUSTER, M. D. et al. A survey of attitude representations. *Navigation*, v. 8, n. 9, p. 439–517, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

SILVA, C. Estimação conjunta de órbita e atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação utilizando observações do magnetômetro e sensor solar. Dissertação (Mestrado Em Ciência Espacial)–Instituto Nacional de Pesquisas, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

SILVA, W. et al. Filtro de partículas rao-blackwellized para estimação de atitude de satélites artificiais usando dados simulados. 2019. Citado na página 55.

SILVA, W. R. Filtro h-infinito estendido de segunda ordem e filtro de partículas regularizado com “roughening” aplicados na estimação de atitude de satélites artificiais. 2016. Citado na página 31.

THÉBAULT, E. et al. International geomagnetic reference field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, Springer, v. 67, n. 1, p. 1–19, 2015. Citado na página 46.

- VAROTTO, S. E. C. Determinação da atitude de satélites artificiais através da aplicação conjunta de técnicas de estimação ótima estática e dinâmica. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos/SP*, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 58, 60 e 76.
- WAHBA, G. A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM review*, SIAM, v. 7, n. 3, p. 409–409, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 57.
- WERTZ, J. R. *Spacecraft attitude determination and control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 73. Citado 4 vezes nas páginas 37, 43, 49 e 57.
- WINCH, D. et al. Geomagnetism and schmidt quasi-normalization. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 160, n. 2, p. 487–504, 2005. Citado na página 46.
- WU, J. et al. Fast linear quaternion attitude estimator using vector observations. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 307–319, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 32, 81 e 85.
- YANG, Y. Attitude determination using newton’s method on riemannian manifold. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 229, n. 14, p. 2737–2742, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 32, 81 e 85.
- YANG, Y. *Spacecraft Modeling, Attitude Determination, and Control Quaternion-based Approach: Quaternion-Based Approach*. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 31, 45, 49 e 60.
- YANG, Y.; ZHOU, Z. An analytic solution to wahba’s problem. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 46–49, 2013. Citado 18 vezes nas páginas 8, 23, 24, 25, 26, 29, 32, 58, 62, 63, 64, 65, 78, 79, 80, 81, 83 e 84.
- ZANARDI, M. *Influência do torque de radiação solar na atitude de um satélite artificial*. Tese (Doutorado) — ITA, São José dos Campos, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.